[区分求積法と極限] 4H2 後半

1. 次の極限の値を求めよ。

(1) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3\right)$

(2)

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

[面積]

2. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ

(1) $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸

(2) $y=\sqrt{1-x}$ と x 軸および y 軸

(3) $y=x^2-2$ と直線 $y=x$

[体積]

3. 次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸

(2) $y=\sqrt{1-x}$ と x 軸および y 軸

[曲線の長さ]

4. 次の曲線の長さ L を求めよ。

$$y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4x^2}\ (1\leqq x\leqq 2)$$

[広義積分]

5. 次の広義積分の値を求めよ。

(1) $I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(2) $I=\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$

(3) $I=\int_{\sqrt{3}}^\infty\frac{1}{x^2+1}dx$

[区分求積法と極限] 4H2 後半

1. 次の極限の値を求めよ。

(1) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3\right)$

$I=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right)\frac{1}{n}$

$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}}_{\int_0^1}\underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)^3}_{x^3}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{dx}=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}$

$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}}_{\int_0^1}\frac{1}{\underbrace{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}_{\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{dx}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1$

$=\mathrm{Tan}^{-1}1-\underbrace{\mathrm{Tan}^{-1}0}_{0}=\frac{\pi}{4}$

[面積]

2. 次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ

(1) $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸

$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\sin 0}_{0}\right)=2$

(2) $y=\sqrt{1-x}$ と x 軸および y 軸

$x=1$のとき、x 軸と交わるので、

$S=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{-1\cdot 3}\left[(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{-2}{3}(0-1)=\frac{2}{3}$

(3) $y=x^2-2$ と直線 $y=x$

連立方程式を解いて、交点の x 座標は $x=-1,2$

$S=\int_{-1}^{2}\left\{\underbrace{x}_{上}-\underbrace{(x^2-2)}_{下}\right\}dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(2-\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{-1}{3}-2\right)=\frac{9}{2}$

[回転体の体積]

3. 次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸

$V=2\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$

(2) $y=\sqrt{1-x}$ と x 軸および y 軸

$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{1-x}\right)^2dx=\pi\int_0^1(1-x)dx=\pi\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$

[曲線の長さ]

4. 次の曲線の長さ L を求めよ。

$y=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4x^2}\ (1\leqq x\leqq 2)$

$1+(y')^2=1+\left(\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2x^3}\right)^2=1+\left(\frac{x^3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2x^3}\right)^2$

$=\left(\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2x^3}\right)^2=\left(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}\right)^2$ より

$L=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}x^{-3}\right)dx$

$=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{1}{4x^2}\right]_1^2=\left(\frac{16}{8}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{33}{16}$

[広義積分]

5. 次の広義積分の値を求めよ。

(1) $I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$I_\varepsilon=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left[\mathrm{Sin}^{-1}x\right]_0^{1-\varepsilon}=\mathrm{Sin}^{-1}(1-\varepsilon)$ より

$I=\lim_{\varepsilon\to+0}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to+0}\mathrm{Sin}^{-1}(1-\varepsilon)=\mathrm{Sin}^{-1}1=\frac{\pi}{2}$

(2) $I=\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$

$I_M=\int_1^M\frac{1}{x^2}dx=\int_0^M x^{-2}dx=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^M=\frac{-1}{M}-\frac{-1}{1}$ より

$I=\lim_{M\to\infty}I_M=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{-1}{M}+1\right)=1$

(3) $I=\int_{\sqrt{3}}^\infty\frac{1}{x^2+1}dx$

$I_M=\int_{\sqrt{3}}^M\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_{\sqrt{3}}^M=\mathrm{Tan}^{-1}M-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}$

$I=\lim_{M\to\infty}I_M=\underbrace{\mathrm{Tan}^{-1}\infty}_{\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}}_{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$