[定積分:三角関数のべき乗]4H2 前半

1. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 x + \cos^5 x\right) dx$

(2) $\int_0^{\pi} \sin^6 x\, dx$

(3) $\int_0^{\pi} \cos^6 x\, dx$

(4) $\int_0^{\pi} \cos^7 x\, dx$

[定積分:部分積分]

2. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $I = \int_0^1 4x e^{2x}\, dx$

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} 25x \sin 5x\, dx$

(3) $I = \int_1^e x \log x\, dx$

[定積分:置換積分]

3. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1) \cos x\, dx$

(3) $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

(4) $I = \int_1^e \frac{\log x}{x} dx$

[定積分:三角関数のべき乗]4H2 前半

1. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+\cos^5 x\right)dx$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{3}{16}\pi+\frac{8}{15}$$

(2) $\int_0^{\pi}\sin^6 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx=2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{16}\pi$

(3) $\int_0^{\pi}\cos^6 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\,dx=2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5}{16}\pi$

(4) $\int_0^{\pi}\cos^7 x\,dx=0$

$y=\cos x$ のグラフより 7(奇数)乗なので、

0 から $\frac{\pi}{2}$ までの符号付き面積(+)と

$\frac{\pi}{2}$ から π までの符号付き面積(−)が打ち消し合う

[定積分:部分積分]

2. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $I=\int_0^1 4xe^{2x}\,dx=\left[(2x-1)e^{2x}\right]_0^1=e^2-\left(-e^0\right)=e^2+1$

	微分		積分
	$+(4x)$		e^{2x}
→	$-(4)$		$\frac{1}{2}e^{2x}$
	$+(0)$	← ∫	$\frac{1}{4}e^{2x}$

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{10}}25x\sin 5x\,dx=\left[-5x\cos 5x+\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{10}}$

$$=\frac{-\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\left(0+\underbrace{\sin 0}_{0}\right)=1$$

	微分		積分
	$+(25x)$		$\sin 5x$
→	$-(25)$		$\frac{-1}{5}\cos 5x$
	$+(0)$	← ∫	$\frac{-1}{25}\sin 5x$

(3) $I=\int_1^e x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx\right]_1^e$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\underbrace{\frac{1}{2}e^2\underbrace{\log e}_{1}-\frac{1}{4}e^2}_{\frac{1}{4}e^2}-\left(\frac{1}{2}\underbrace{\log 1}_{0}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}$$

	微分		積分
	$+(\log x)$		x
→	$-\left(\frac{1}{x}\right)$	← ∫	$\frac{1}{2}x^2$

[定積分:置換積分]

3. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $I=\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$t=\sqrt{x+1}\to t^2=x+1\to \begin{matrix}2tdt=dx\\ x=t^2-1\end{matrix}$

x	0	3
t	1	2

より

$$I=\int_1^2\frac{t^2-1}{t}2t\,dt=2\int_1^2\left(t^2-1\right)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^2$$

$$=2\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}=\frac{8}{3}$$

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)\cos x\,dx$

$t=\sin x\to dt=\cos x\,dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$t=\sin x$	0	1

より

$$I=\int_0^1(t+1)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

(3) $I=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$t=x^2+x+1\to dt=(2x+1)dx$

x	0	1
t	1	3

より

$$I=\int_1^3\frac{1}{t}dt=\left[\log|t|\right]_1^3=\log|3|-\underbrace{\log|1|}_{0}=\log 3$$

(4) $I=\int_1^e\frac{\log x}{x}dx$

$t=\log x\to dt=\frac{1}{x}dx$

x	1	e
$t=\log x$	0	1

より

$$I=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1^2-0^2\right)=\frac{1}{2}$$