[行列の和・定数倍および積と逆行列] 2H1

1.　$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$のとき次を求めよ。

(1)　$2A-B$

(2)　$AB$

(3)　$A^2$

(4)　$A^{-1}$

2.　次の行列の積を求めよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[行列のべき乗とケーリーハミルトンの定理]

3.　$A=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$のとき次を求めよ。

(1)　$A^5$

(2)　$B^6$

[行列と連立方程式]

4.　$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$のとき

次をみたす行列$C, D$を求めよ。

(1)　$AC=B$

(2)　$DA=B$

5.　次の連立方程式を行列表示して、

(逆)行列を用いて解け。

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 2x-5y=1 \end{cases}$$

[行列の和・定数倍および積と逆行列] 2H1

1. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$のとき次を求めよ。

(1) $2A-B=2\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

(2) $AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot5+(-2)\cdot(-2) & 3\cdot1+(-2)\cdot1\\ 1\cdot5+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot1+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 1\\ 7 & 0\end{pmatrix}$$

(3) $A^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+(-2)\cdot1 & 3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)\\ 1\cdot3+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

(4) $A^{-1}=\dfrac{1}{3\cdot(-1)-(-2)\cdot1}\begin{pmatrix}-1 & -(-2)\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

2. 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot2+0\cdot(-1)+(-1)\cdot1\\ 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot(-1)+0\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot1 & 1\cdot(-1)+2\cdot0\\ 0\cdot1+(-1)\cdot2 & 0\cdot0+(-1)\cdot1 & 0\cdot(-1)+(-1)\cdot0\\ 1\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot(-1)+1\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

[行列のべき乗とケーリーハミルトンの定理]

3. $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$のとき次を求めよ。

(1) $A^5$ $\mathrm{tr}A=0, |A|=2$ より固有多項式は

$\varphi_A=\lambda^2-0\cdot\lambda+2=\lambda^2+2$ だから

$A^2+2E=0\Rightarrow A^2=-2E$ よって

$$A^5=\left(A^2\right)^2A=(-2E)^2A=4\underbrace{E^2}_{E}A=4A=\begin{pmatrix}8 & -24\\ 4 & -8\end{pmatrix}$$

(2) $B^6$ $\mathrm{tr}A=1, |A|=-2$ より固有多項式は

$\varphi_A=\lambda^2-1\cdot\lambda+(-2)=(\lambda-2)(\lambda+1)$ だから

固有値は、$\lambda=\underset{\alpha}{2},\underset{\beta}{-1}$ よって 公式より

$$B^6=\frac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha-\beta}B+\frac{\alpha\beta^6-\beta\alpha^6}{\alpha-\beta}E$$

$$=\frac{2^6-(-1)^6}{2-(-1)}B+\frac{2(-1)^6-(-1)2^6}{2-(-1)}E=21B+22E$$

$$=21\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}+22\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85 & 21\\ -84 & -20\end{pmatrix}$$

[行列と連立方程式]

4. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$のとき

次をみたす行列 $C, D$ を求めよ。

(1) $AC=B$ 左から両辺に $A^{-1}$ を掛けて

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1\\ 11 & -2\end{pmatrix}$$

(2) $DA=B$ 右から両辺に $A^{-1}$ を掛けて

$$D=BA^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -13\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

5. 次の連立方程式を行列表示して、

(逆)行列を用いて解け。

$$\begin{cases}2x-3y=3\\ x-5y=-2\end{cases}$$

$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2\cdot(-5)-(-3)\cdot1}\begin{pmatrix}-5 & -(-3)\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$$

$=\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix}-21\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ よって $x=3,\ y=1$