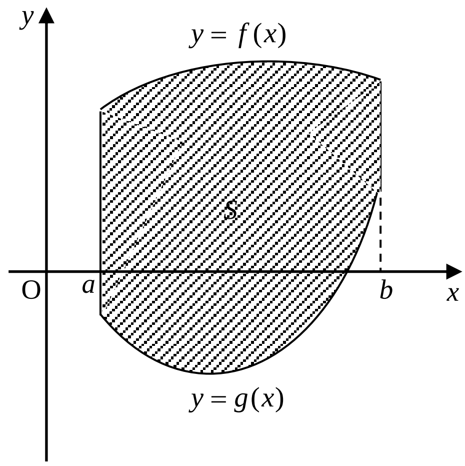
5.2　面積(応用)

前回の復習から

閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において
$f(x) > g(x)$ とする。
２つの曲線 $y = f(x),\ y = g(x)$ と
２つの直線 $x = a,\ x = b$ とで
囲まれた図形の面積 S は,
次式で与えられる。



［面積］　$S = \int_a^b \{ \underbrace{f(x)}_{\text{<上側>}} - \underbrace{g(x)}_{\text{<下側>}} \}\ dx$

※「上側の関数」から「下側の関数」を引いて,
　積分すると，その間の空間部分の面積を
　求めることができる

例題　次の曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y = 4 - x^2$，　$y = x + 2$

(2)　$y = \dfrac{4}{x}$，　$y = 5 - x$

［解答］

(1) ①情報を「被積分関数(y 有)」と「積分範囲(y 無)」に分類する

y 有： $y = 4 - x^2$，　$y = x + 2$

（※見つける情報は「上側」と「下側」の２つ）

y 無： $\boxed{}$,　$\boxed{}$

（※見つける情報は「上端」と「下端」の２つ）

②「 y 無」の情報が足りないときは, 「 y 有」を連立して補充する

$4 - x^2 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0 \qquad \therefore\ x = -2,\ 1$

③どちらが「上側」か「下側」かを調べる。

積分範囲(今回は$-2 \leqq x \leqq 1$)内の点を，①の関数に代入して確認する

$y = 4 - x^2$ に $x = 0$ を代入すると　$y = 4$　<上側>

$\vee$

$y = x + 2$ に $x = 0$ を代入すると　$y = 2$　<下側>

(※積分範囲内の同じ値を代入する)

④面積を求める。

$$S = \int_{-2}^{1} \{(4 - x^2) - (x + 2)\}\ dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\ dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right)$$

$$= \frac{-2 - 3 + 12}{6} - \frac{8 - 6 - 12}{3} = \frac{7}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7 + 20}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

(2)　y 有：$y = \dfrac{4}{x}$　　（$x = 2$ のとき　$y = 2$）

$y = 5 - x$　　（$x = 2$ のとき　$y = 3$）

y 無：(連立)　$\dfrac{4}{x} = 5 - x$　$\Rightarrow$　$4 = 5x - x^2$　　積分範囲$1 \leqq x \leqq 4$

$\Rightarrow$　$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$　　$\therefore\ x = 1,\ 4$

よって，求める面積は

$$S = \int_{1}^{4} \left\{ (5 - x) - \frac{4}{x} \right\}\ dx = \int_{1}^{4} \left(5 - x - \frac{4}{x} \right)\ dx$$

$$= \left[5x - \frac{1}{2}x^2 - 4\log|x| \right]_{1}^{4} = (20 - 8 - 4\log 4) - \left(5 - \frac{1}{2} - 4\log 1 \right)$$

$$= 12 - 4\log 2^2 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2} - 8\log 2$$

問 10.20　次の曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y = x^2$，　$y = x + 2$

(2)　$y = \sin x$，　$y = \cos x$　$\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi \right)$

(3)　$y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$，　$y = \dfrac{1}{4}$

5.3　面積（発展）

「y 無」の情報が３つ出てくるときを扱います。

$a<b<c$ とする。
y 無： $x=a,\ x=b,\ x=c$ のときは
積分範囲を，（前半）$a \leqq x \leqq b$ と（後半） $b \leqq x \leqq c$ に分ける

例題　次の曲線と直線とで囲まれた図形の面積を求めよ。
$y=x(x+2)(x-3)$， x 軸

［解答］ y 有： $y=x(x+2)(x-3) \cdots$①，　$y=0$
y 無：(連立) $x(x+2)(x-3)=0$　　$\therefore x=0,\ -2,\ 3$
このとき，上側，下側を調べる。
$-2 \leqq x \leqq 0$ の場合　①に $x=-1$ を代入すると　$y=(-1)\times 1\times(-4)=4>0$
⇒　上側： $y=x(x+2)(x-3)$，下側： $y=0$
$0 \leqq x \leqq 3$ の場合　①に $x=1$ を代入すると　$y=1\times 3\times(-2)=-6<0$
⇒　上側： $y=0$，下側： $y=x(x+2)(x-3)$
よって，求める面積は

※上下が入替っている

$$S=\int_{-2}^{0}\{x(x+2)(x-3)-0\}\ dx+\int_{0}^{3}\{0-x(x+2)(x-3)\}\ dx$$

$$=\int_{-2}^{0}x(x+2)(x-3)\ dx-\int_{0}^{3}x(x+2)(x-3)\ dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-6x)\ dx-\int_{0}^{3}(x^3-x^2-6x)\ dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=\left\{0-\left(4+\frac{8}{3}-12\right)\right\}-\left\{\left(\frac{81}{4}-9-27\right)-0\right\}$$

$$=-\frac{12+8-36}{3}-\frac{81-36-108}{4}$$

$$=-\frac{-16}{3}-\frac{-63}{4}=\frac{16}{3}+\frac{63}{4}=\frac{64+189}{12}=\frac{253}{12}$$