§５　面積

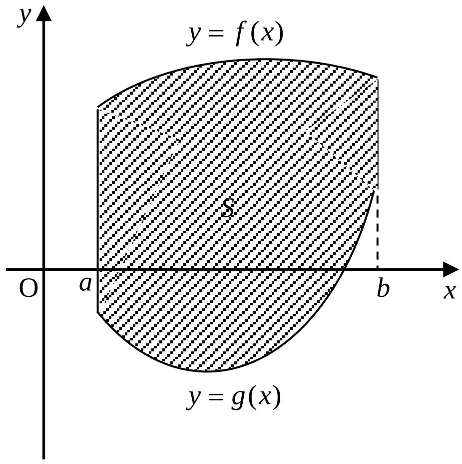
5.1　面積

２つの曲線で囲まれた
図形の面積を求めます

閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において， $f(x) \geqq g(x)$ とする。
このとき，２つの曲線 $y = f(x),\ y = g(x)$ と直線 $x = a,\ x = b$ とで
囲まれた図形の面積 S は，次式で求めることができる。

［面積］ $S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\ dx$

※「上側の関数」から
「下側の関数」を引いて
積分すると
その間の空間部分の
面積が求められる。



証明は次頁に掲載しています。

本日は，次の場合を取扱う。
上側の関数　$y = f(x)$
下側の関数　$y = 0$（x 軸）

曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a,\ x = b$ 及び $\boxed{x\text{軸}}$とで
囲まれた図形の面積は，次で与えられる。

［※ $g(x) = 0$ の場合 ］

［面積］ $S = \int_a^b f(x)\ dx$

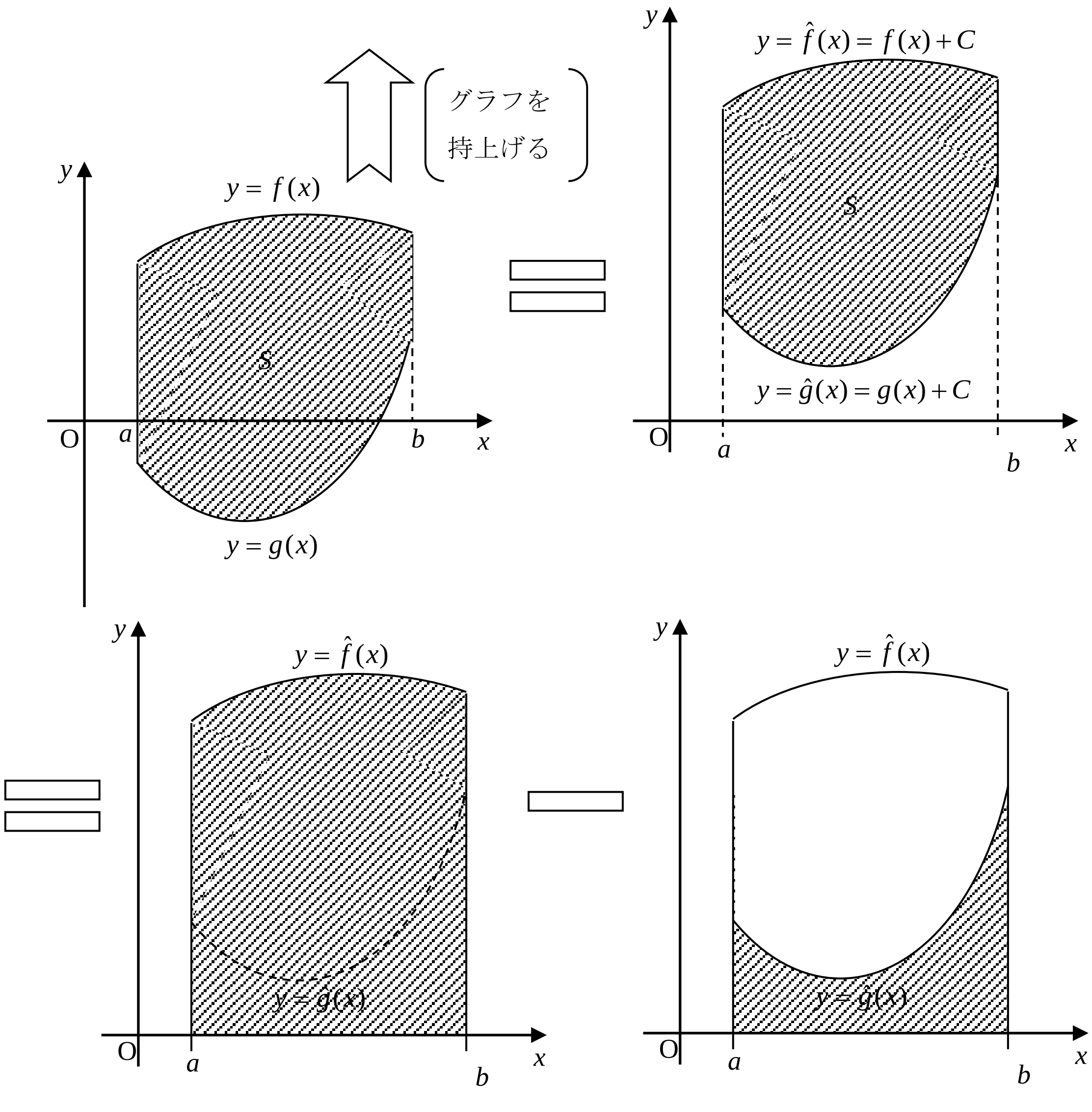
証明）２つの関数 $y=f(x),\ y=g(x)$ が，正値関数となるように

十分大きな数Cを加える。

$$y=\hat{f}(x)=f(x)+C,\ y=\hat{g}(x)=g(x)+C$$

（※ f，g の上部の記号 ”ˆ” は，”ハット”と発音）

このとき，次の関係式が成り立つ。



$$=\int_a^b \hat{f}(x)\ dx-\int_a^b \hat{g}(x)\ dx=\int_a^b\{\hat{f}(x)-\hat{g}(x)\}\ dx$$

$$=\int_a^b\{(f(x)+C)-(g(x)+C)\}\ dx$$

$$=\int_a^b\{(f(x)-g(x)\}\ dx$$

例題　次の曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2$，　x軸，　$x=1$，　$x=2$　[基本]

(2)　$y=1-x$，　x軸，　y軸　[応用]

［解法］次の内容を手に入れろ！

１）**被積分関数**(積分記号内の情報)について

※“$y=$”の情報を２つ探す。

１つは「上側の関数」で，残りの１つは「下側の関数」

※「x軸」とは，$y=0$という直線のことである。

※［解答］では，「y有」と表現する。

２）**積分範囲**(積分記号の「下端」から「上端」まで)について

※yを含まない情報を２つ探す。

小さい値が「下端」，大きい値が「上端」

２つないときは，１）の内容を連立させて求める。$\boxed{\text{重要}}$

※「y軸」とは，$x=0$を意味する。

※［解答］では，「y無」と表現する。

［解答］

(1) 情報：$y=x^2$，　x軸，　$x=1$，　$x=2$　を分類する。

y有：$y=x^2$，　$y=0$ (x軸)　　　y無：$x=1$，　$x=2$

<上側>　<下側>　　　<下端>　<上端>

よって，求める面積は

$$S=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

(2) 情報：$y=1-x$，　x軸，　y軸　を分類する。

［※情報が足りない！］

y有：$y=1-x$，　$y=0$ (x軸)　　　y無：$x=0$ (y軸)，

連立させる

$1-x=0$　$\therefore x=1$

［※情報を組込む］

y無：$x=0$ (y軸)，　$x=1$

よって，求める面積は

$$S=\int_0^1 (1-x)\,dx=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

問 10.19　次の曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y = e^{3x}$，　x 軸，　$x = 0$，　$x = 2$

(2)　$y = \dfrac{1}{x}$，　x 軸，　$x = 1$，　$x = 3$

(3)　$y = \sin x$　（$0 \leqq x \leqq \pi$），　x 軸

(4)　$y = \sqrt{x + 3}$，　x 軸，　y 軸