§４　定積分の応用

4.1　区分求積法

区分求積法とは？

区分求積法とは，「図形を分割して，面積を求める方法」です。
少し長くなりますが，次に手順を示します。

手順１：閉区間 $a \leqq x \leqq b$ を，n 等分に**分割**します。
n 等分された**分点**を，次の様に設定します。

［分　　点］ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

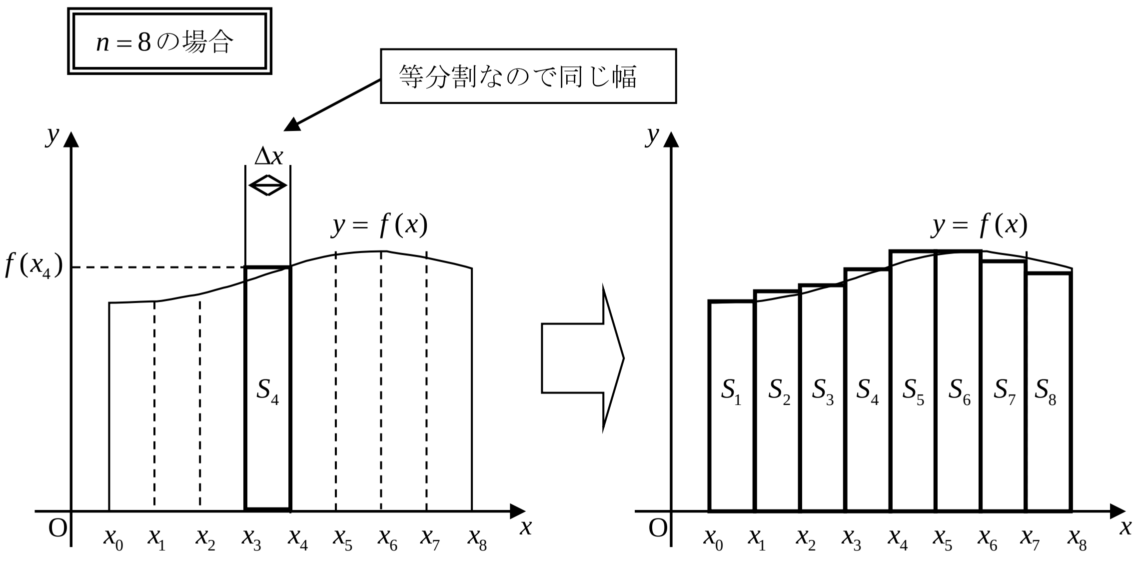
また，各小閉区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ の**分割の幅**を Δx とする。

Δ はデルタと発音

［分割の幅］ $\Delta x = x_k - x_{k-1}$

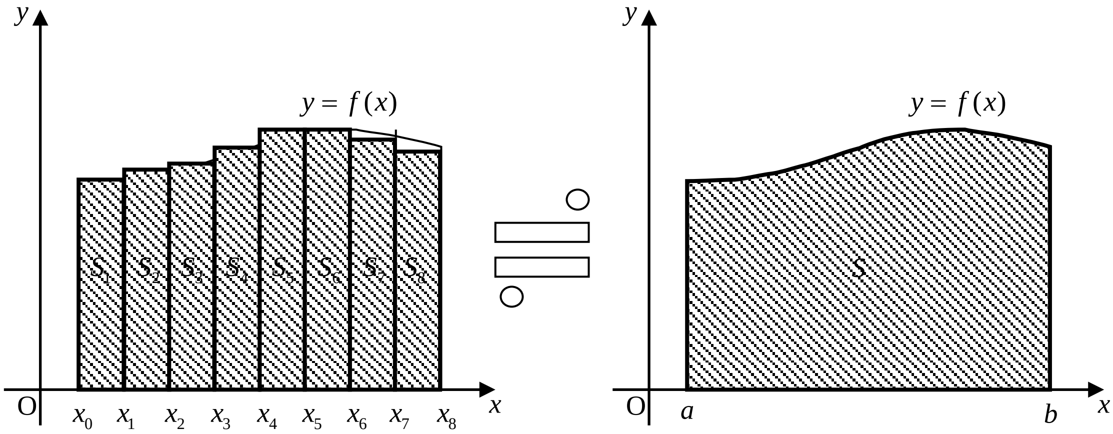
手順２：各小閉区間の右端 $x = x_k$ に対応する関数の値 $y = f(x_k)$ を
高さとする小長方形を S_k とする。
また，同じ記号 S_k はその小長方形の面積を表すものとする。

［小長方形］ $S_k = f(x_k)\ \Delta x$



手順３：各小長方形の面積 S_k の総和は，曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ 及び x 軸とで囲まれた図形の面積 S の近似となる。

［近 似 式］ $S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \Delta x$



手順４：**分割数** n を多くするほど，近似の精度が上がるから，次の式が成り立つ。

［面　　積］ $S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \Delta x$

以上です。ここまでの手順によって，「区分求積法」と「定積分」の関係を述べることができます。

閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において， $y = f(x)$ が正値関数とするとき ［区分求積法］ $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \Delta x = \int_a^b f(x)\ dx$

【注意】区分求積法の考え方は，今後に学習する「回転体の体積」や「曲線の長さ」を定積分により求める公式を求めるときにも使用します。

例題　曲線 $y=x^2$ と直線 $x=1$ 及び x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

［解答］(1) 定積分を用いた場合

$$S=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) 区分求積法を用いた場合

手順１：閉区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分するので，分割の幅は　$\Delta x=\frac{1}{n}$

各分点は　$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\frac{3}{n}<\cdots<\frac{n}{n}=1$　$\Rightarrow$　一般項　$x_k=\frac{k}{n}$

関数は　$y=f(x)=x^2$　$\Rightarrow$　$f(x_k)=x_k^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2$

【一般】閉区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分するので，分割の幅は　$\Delta x=\frac{b-a}{n}$

各分点は，初項 a，公差 Δx の等差数列になるから

一般項は　$a_k=a+k\Delta x$　で表される。

（※通常の　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$　の場合は　$a_k=a+(k-1)\Delta x$　ですが
　今回は　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$　の場合なので　$a_k=a+k\Delta x$　となる。）

手順２：小長方形の面積　$S_k=f(x_k)\ \Delta x=\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}=\frac{k^2}{n^3}$

手順３：近似　$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

［※ k 以外の文字は $\sum$ の前に出せる］

【復習】(1) $\sum_{k=1}^{n}1=n$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　(4) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

手順４：面積　$S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+3}{12n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$　[※ロピタルの定理]

［※(1) と同じ値が得られた］

問 10. 17　区分求積法を用いて $\int_0^2 x\,dx$ の値を求めよ。

4.2　区分求積（応用）

ここでは，応用問題を取扱います。

等分割の場合，閉区間$0 \leqq x \leqq 1$において，[※前頁例題参照]

分割の幅は　$\Delta x = \dfrac{1}{n}$，　一般項は　$x_k = \dfrac{k}{n}$

よって，区分求積法と積分の関係は，次の様に書き直すことがでます。

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

今回は，次の公式を用いた応用問題を取扱います。

［公式］　$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx$$

例題　極限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ の値を求めよ。

［解説＆解答］

1）（　　）内の部分和を$\sum$ を用いて表記する。

このとき，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ と変化している部分を見つける。

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+\boxed{1}}+\frac{1}{n+\boxed{2}}+\frac{1}{n+\boxed{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\boxed{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\boxed{k}}$$

2）[公式]の左辺の形　$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$　を作る。

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\boxed{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\boxed{n}}{n+k}$$　：まず，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}$　の形を作る

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(k/n\right)}$$　：次に，$\sum$　の右側に$\left(k/n\right)$を作る

[※ 今回は分母分子をnで割る]

3）[公式]を適用して，積分に変える。

変形手順は　①$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}$ を$\int_0^1$ 表記に　②$\left(k/n\right)$ をx表記に

③式の最後にdxを追記する

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\boxed{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\boxed{n}}{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(k/n\right)}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

4）定積分を計算して終了です。

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\boxed{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\boxed{n}}{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(k/n\right)}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2-\log 1=\log 2$$

問 10.18　次の極限の値を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(2)　$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\left\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots(n+n)^2\right\}$

4.3　台形公式

台形公式とは？

台形公式とは，区分求積法を
数値計算用に，改良したものです。次に，その手順を示します。

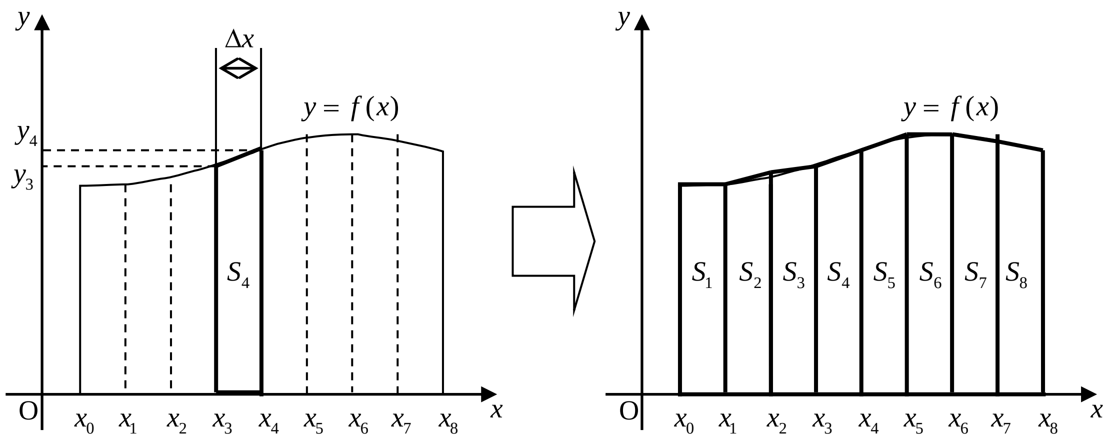
手順１：閉区間$a \leqq x \leqq b$を，n等分に分割します。
n等分された分点を，次の様に設定します。
［分　　点］　$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
また，各小閉区間$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$の分割の幅を$\Delta x$とする。
［分割の幅］　$\Delta x = x_k - x_{k-1}$

手順２：各小閉区間$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$において，両端に対応する関数の値を
$y_{k-1} = f(x_{k-1})$，$y_k = f(x_k)$とし，４点$(x_{k-1},\ 0)$，$(x_k,\ 0)$，$(x_k,\ y_k)$，
$(x_{k-1},\ y_{k-1})$ を頂点とする小台形をS_kとする。
また，同じ記号S_kはその小台形の面積を表すものとする。

［小長方形］　$S_k = \dfrac{1}{2}(\underline{\underline{y_{k-1}}} + \underline{\underline{y_k}})\ \underline{\underline{\Delta x}}$

［※（台形の面積）＝（上底＋下底）×高さ÷２］

$n = 8$の場合



手順３：各小台形の面積 S_k の総和は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$，$x=b$ 及び x 軸とで囲まれた図形の面積 S の近似となる。

[近 似 式] $$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(y_{k-1}+y_k)\ \Delta x$$

もう少し，詳しく調べていきます。

$n=8$ の場合

[近似式] $$S \fallingdotseq S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8$$

$$=\frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x+\frac{1}{2}(y_2+y_3)\Delta x+\frac{1}{2}(y_3+y_4)\Delta x$$

$$+\frac{1}{2}(y_4+y_5)\Delta x+\frac{1}{2}(y_5+y_6)\Delta x+\frac{1}{2}(y_6+y_7)\Delta x+\frac{1}{2}(y_7+y_8)\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+y_8)\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}\{\boxed{2}y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6+2y_7+\boxed{2}y_8)-(y_0+y_8)\}\Delta x$$

$$=\left\{(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8)-\frac{y_0+y_8}{2}\right\}\Delta x$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{n} y_k-\frac{y_0+y_8}{2}\right\}\Delta x$$

従って，次の数値計算の近似公式を導くことができます。

［台形公式］ $$\int_a^b f(x)\ dx = S \fallingdotseq \left\{\sum_{k=0}^{n} f(x_k)-\boxed{\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}}\right\}\Delta x$$

（※両端による補正値）

例題　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の近似値を，シンプソンの台形公式を用いて求めよ

［解答］　分割数　$n=10$

分割の幅　$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1-0}{10}=0.1$

関数　$y=\dfrac{1}{1+x^2}$

DATA

x	y
0.0	1.00
0.1	0.99
0.2	0.96
0.3	0.92
0.4	0.86
0.5	0.80
0.6	0.74
0.7	0.67
0.8	0.61
0.9	0.55
1.0	0.50
合計	① 8.60

両端による補正値

② $\dfrac{1.00+0.50}{2}=0.75$

近似値　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \fallingdotseq \left\{\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}-\boxed{\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}}\right\}\Delta x$

$=(8.60-0.75)\times 0.1=0.785$

【参考】$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\left[\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1=\mathrm{Tan}^{-1}(1)-\mathrm{Tan}^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

よって，上記計算で求めた値を 4 倍することにより，
円周率 π の近似値を求めることができます。

$\pi \fallingdotseq 4\times 0.785=3.14$