2.2　簡便な公式２

簡便な公式とは？

「数列の漸化式」と「独特な部分積分法」を用いて
「簡便な公式」を導出します。

準備：数列$\{a_n\}$ を次の様に定義します。

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad [※数列の項番号 n は \sin x の乗数を表す]$$

本編：独特な部分積分法

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad ：数列の定義$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \times \sin x\,dx \qquad ：\sin x を 1 個だけ別にする$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \times (-\cos x)'\,dx \qquad ：部分積分法を用いる$$

$$= \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\} \times \cos x\,dx$$

$$[※\{\sin^{n-1} x\}' = \{u^{n-1}\}' = (n-1)u^{n-2}u' = (n-1)\sin^{n-1} x \cos x\,]$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \qquad ：\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \qquad ：\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx$$

$$= (n-1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x)\,dx\right\}$$

$$= (n-1)\{a_{n-2} - a_n\} \qquad ：数列の定義$$

よって，次なる結果が得られたことになる。

$$a_n = (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$$

$$a_n + (n-1)a_n = (n-1)a_{n-2}$$

$$\{1+(n-1)\}a_n = (n-1)a_{n-2}$$

$$na_n = (n-1)a_{n-2}$$

従って，次なる漸化式が成り立つ。　$a_n = \dfrac{n-1}{n}a_{n-2}$

定積分_第 06 回

それでは，この漸化式から何が導けるのか考えましょう。

[初期値]

$n=0$ のとき

$$a_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$n=1$ のとき

$$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1$$

[漸化式]　$a_{\boxed{n}}=\dfrac{\boxed{n}-1}{\boxed{n}}a_{\boxed{n}-2}$　（※各 n に２から順次，値を代入する）

$n=2$ のとき

$$a_2=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$n=3$ のとき

$$a_3=\frac{2}{3}a_1=\frac{2}{3}\times(1)$$

$n=4$ のとき

$$a_4=\frac{3}{4}a_2=\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$n=5$ のとき

$$a_5=\frac{4}{5}a_3=\frac{4}{5}\times\left(\frac{2}{3}\times 1\right)$$

$n=6$ のとき

$$a_6=\frac{5}{6}a_4=\frac{5}{6}\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$n=7$ のとき

$$a_7=\frac{6}{7}a_5=\frac{6}{7}\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1\right)$$

$n=8$ のとき

$$a_8=\frac{7}{8}a_6=\frac{7}{8}\times\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$n=9$ のとき

$$a_9=\frac{8}{9}a_7=\frac{8}{9}\times\left(\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1\right)$$

$\vdots$　　　　$\vdots$

何か法則を見つけることができましたか？

一般には，次の様に表記されます。

［簡便な公式２］

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ が偶数のとき})\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times 1 & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

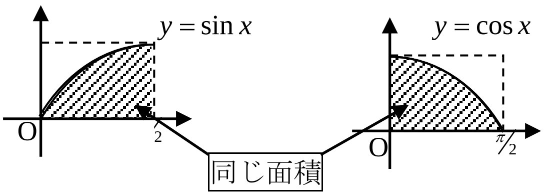
[参考：簡便な公式]　$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

【注意事項】

１）定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，

関数 $y=f(x)$， $x=a,\ x=b$ 及び x 軸とで囲まれた部分の面積を表しているので，明らかに次のことがわかります。

$\boxed{\text{［簡便な公式２］}\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx}$



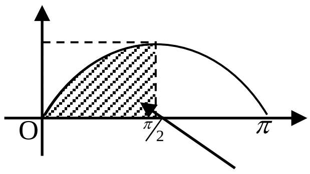
２）積分範囲が　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$　の限定公式です。

※積分範囲が $0 \leqq x \leqq \pi$ のときは，工夫が必要です。

[1] $\boxed{\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx}$ が成り立ちます。

証明）対称性より，右側の部分も同じ面積。

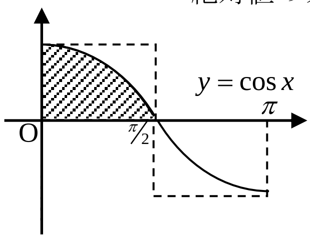
全体 $[0 \leqq x \leqq \pi]$ は，斜線部の２倍となる



公式が使用できる部分 $[0 \leqq x \leqq \pi/2]$

[2]　絶対値のグラフを覚えていますか？

絶対値のグラフは， x 軸の下側を上側に折り返します。

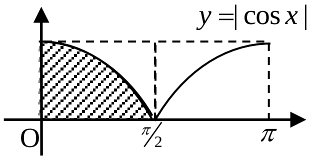


説明）対称性より，右側の部分も同じ面積。

n が奇数の場合，グラフは下側にある。

よって，面積は相殺される。

$\boxed{\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = 0 \qquad (n\text{ が奇数})}$



n が偶数のときは，絶対値と同じ効力がある。

よって，斜線部[公式使用場所]の２倍となる

$\boxed{\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \qquad (n\text{ が偶数})}$

例題　次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\ dx = \frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1 \left(=\frac{\cancel{6}2}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{\cancel{3}}\times 1\right)=\frac{16}{35}$

（※与えられた乗数からスタートする[下→上→下→…]）

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\ dx = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\boxed{\frac{\pi}{2}} \left(=\frac{5}{\cancel{6}2}\times\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{32}\pi$

（※ n が偶数のときは，最後に $\dfrac{\pi}{2}$ が必要！）

（※ $\sin^n x$, $\cos^n x$ の両方に使用可能）

問 10.5　次の定積分を計算せよ。（前頁の【注意事項】は読みましたか？）

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\ dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 x\ dx$

§３　置換積分法

3.1　置換積分法

定積分の置換積分法とは？

不定積分の置換積分法

$u = g(x) \cdots ①$　とおくと　$\dfrac{du}{dx} = g'(x)$　　$\therefore\ dx = \dfrac{du}{g'(x)} \cdots ②$

①と②より　$\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)\,\cancel{g'(x)}\times\frac{du}{\cancel{g'(u)}} = \int f(u)\ du$

定積分の場合は，積分範囲を変換する作業③が１つ増えます。

［定積分の置換積分法］

$u = g(x) \cdots ①$　とおくと　$\dfrac{du}{dx} = g'(x)$　　$\therefore\ dx = \dfrac{du}{g'(x)} \cdots ②$

$x : a \to b$　のとき　$u : \alpha[= g(a)] \to \beta[= g(b)] \cdots ③$　（←New）

①～③より　$\displaystyle\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{\boxed{\alpha}}^{\boxed{\beta}} f(u)\,\cancel{g'(x)}\times\frac{du}{\cancel{g'(x)}} = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)\ du$

説明）不定積分の置換積分をもう少し書き加えると

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \cdots = \int f(u)\ du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

つまり，$F(g(x))$ が，$f(g(x))g'(x)$ の原始関数であるので

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(\beta) - F(\alpha) = \left[F(u)\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(u)\ du$$

従って，積分範囲を直す，③の作業が必要となる。

『$x : a \to b$ のとき　$u : \alpha[= g(a)] \to \beta[= g(b)] \cdots$③　（←New）』

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ を計算せよ。

［解答］　$u = 4 - x^2 \cdots$①　とおくと　$\dfrac{du}{dx} = -2x$　　$\therefore\ dx = \dfrac{du}{-2x} \cdots$②

$x : 0 \to 1$　のとき　$u : [4-0=]4 \to [4-1=]3 \cdots$③

（※①の式に代入する）

①～③より　（与式）$\displaystyle = \int_4^3 \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{-2\cancel{x}} = \frac{-1}{2}\int_4^3 u^{-\frac{1}{2}} du$

$$= \frac{-1}{2}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right]_4^3 = -\left[\sqrt{u}\right]_4^3 = -\left(\sqrt{3} - \sqrt{4}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

※③の作業で積分範囲を書き直した際に，範囲の反転が起きています。
しかし，定積分の拡張により，通常の上端と下端をそれぞれ代入した値を引き算する作業で正しく計算できるようになっています。
どうしても気になる方は，次の公式(拡張内容)で変形して下さい。

［公式］　$\displaystyle\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$

実際　$\displaystyle\frac{-1}{2}\int_4^3 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\int_3^4 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right]_3^4 = 2 - \sqrt{3}$　が得られます。

問 10.6　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^4}{x} dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx$