1.6　定積分の線形性

線形性とは？

次の等式が成り立つことを，**線形性**といいます。

［線形性］　$\int_a^b \{sf(x)+tg(x)\}\ dx = s\int_a^b f(x)\ dx + t\int_a^b g(x)\ dx$

（但し，s, t は実数）

証明）$f(x)$，$g(x)$ の原始関数を $F(x)$，$G(x)$ とする。

$$\begin{aligned}\int_a^b \{sf(x)+tg(x)\}\ dx &= \left[sF(x)+tG(x)\right]_a^b \\ &= \left\{sF(b)+tG(b)\right\}-\left\{sF(a)+tG(a)\right\} \\ &= s\left\{F(b)-F(a)\right\}+t\left\{G(b)-G(a)\right\} \\ &= s\left[F(x)\right]_a^b + t\left[G(x)\right]_a^b \\ &= s\int_a^b f(x)\ dx + t\int_a^b g(x)\ dx\end{aligned}$$

例題　定積分 $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ を計算せよ。

［解答］　$\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}\right)dx = \int_1^2 \left(x^2+\frac{2}{x}+x^{-4}\right)dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+2\log|x|-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{3}x^3+2\log|x|-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2$$

（ここからの計算方法は２通りあります）

[Type(A)]　$= \left(\frac{8}{3}+2\log 2-\frac{1}{24}\right)-\left(\frac{1}{3}+2\log 1-\frac{1}{3}\right)$

$$= \left(\frac{64}{24}+2\log 2-\frac{1}{24}\right)-0 = \frac{63}{24}+2\log 2$$

[Type(B)]　$= \frac{1}{3}(8-1)+2(\log 2-\log 1)-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{7}{3}+2\log 2+\frac{7}{24} = \frac{63}{24}+2\log 2$$

問 10.2　定積分 $\int_1^2 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ を計算せよ。

（Hint：指数法則　① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

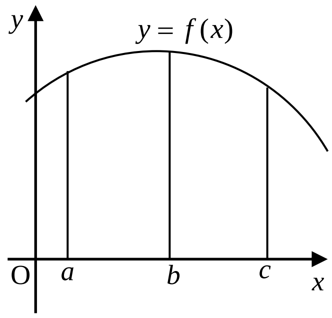
③ $(a^m)^n = a^{mn}$　④ $(ab)^m = a^m b^m$ ）

1.7　定積分の特別な性質

特別な性質とは？

積分範囲を２つに分ける(１つにまとめる)ことができます。

［性質］　$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$



証明）　$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b + \left[F(x)\right]_b^c$$

$$= \left\{F(b) - F(a)\right\} + \left\{F(c) - F(b)\right\}$$

$$= F(c) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^c = \int_a^c f(d)\ dx$$

1.8　奇関数と偶関数の定積分

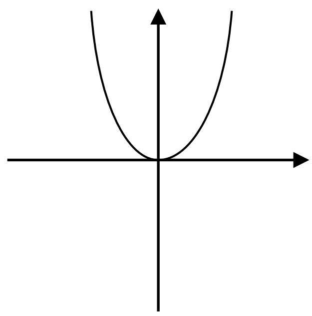
奇関数，偶関数とは？

○ y 軸対称なグラフをもつ関数を**偶関数**といいます。

例）$1,\ x^2,\ x^4,\ x^6,\ \cdots$　及び　$\cos ax$　など

数学的には，次の様に表現されます。

$f(x)$ が偶関数　$\Leftrightarrow$　$f(-x) = +f(x)$

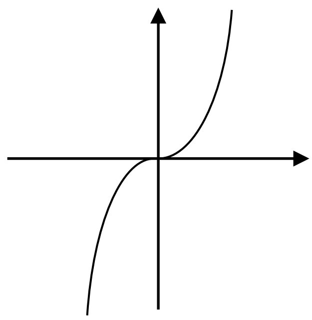


○原点対称なグラフをもつ関数を**奇関数**といいます。

例）$x,\ x^3,\ x^5,\ \cdots$　及び　$\sin ax$　など

数学的には，次の様に表現されます。

$f(x)$ が奇関数　$\Leftrightarrow$　$f(-x) = -f(x)$



○原点を挟んで等距離である積分範囲,

つまり, $-a \leqq x \leqq a$ のとき,次の様な関係式が成り立つ。

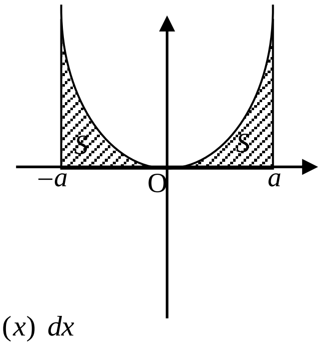
(1) $f(x)$ が偶関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$

[※全体の面積は,右半分の面積の 2 倍である]

(2) $f(x)$ が奇関数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$

[※全体の面積は,相殺されて 0 である]

証明)(1) 右側半分の面積を S とする。



つまり $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\ dx = S$

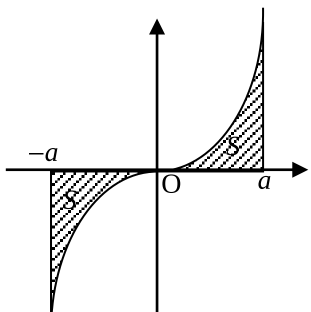
このとき,グラフの対称性より

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = S$$

よって $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$

$$= S + S = 2S = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

(2) 右側半分の面積を S とする。



つまり $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\ dx = S$

このとき,グラフの対称性より

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = -S$$

よって $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = S - S = 0$

例題 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (10x^3 + 9x^2 + 8x + 7)\ dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\sqrt{4 - x^2}\ dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\ dx$

［使用上の注意］次の２点を確認してください。

１）積分範囲は，原点を挟んで等距離になっていますか？

$$0\ \int_{-a}^{a} f(x)\ dx$$

２）被積分関数 $f(x)$ は，奇関数、偶関数のどちらかになっていますか？

［解説＆解答］

(1)それぞれの係数は，線形性から積分計算には直接関係しません。

最後の定数項は $\int_{-1}^{1} 7dx = 7\int_{-1}^{1} dx = 7\int_{-1}^{1} 1\ dx = 7\int_{-1}^{1} x^0\ dx$ を意味します。

このとき、偶数乗$[n = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots]$は偶関数より，右半分の２倍

奇数乗$[n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots]$は奇関数より，計算結果は 0(計算不要)

よって，(与式)は次の様に変形できます。

奇関数は計算不要

$$\int_{-1}^{1}(10\boxed{x^3} + 9\boxed{x^2} + 8\boxed{x} + 7\boxed{x^0})\ dx = 2\int_{0}^{1}(9x^2 + 7)\ dx$$

偶関数は右半分の２倍

$$= 2\Big[3x^3 + 7x\Big]_0^1 = 2(3 + 7) = 20$$

注意！　(※下端($x = 0$)の代入値は 0 より省略)

(2) $\cos ax$ は偶関数です。(⇔ $\cos(-ax) = \cos ax$)

[※$\sin ax$ は奇関数です。(⇔ $\sin(-ax) = -\sin ax$)]

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = 2\big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2$$

(3) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ とおくと $f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$

よって，$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ は奇関数だから $\int_{-2}^{2} x\sqrt{4 - x^2}\ dx = 0$

(4) 早見表は　①[奇関数]と[奇関数]の積または商は[偶関数]

②[奇関数]と[偶関数]の積または商は[奇関数]

③[偶関数]と[偶関数]の積または商は[偶関数]

よって，x^2 [偶関数]と $\sin x$ [奇関数]の積は[奇関数]だから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\ dx = 0$$

問 10.3　次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(11x^7+7x^5+5x^3+3x^2+1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2-9}dx$

1.9　部分積分法

定積分の部分積分法とは？

計算手法は，不定積分と同じです。

不定積分の部分積分法

$$\int f(x)g(x)\ dx=\int f(x)G'(x)\ dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)\ dx$$

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx=\int_a^b f(x)G'(x)\ dx=\left[f(x)G(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)G(x)\ dx$$

【注意事項】

１）“仕込み”の優劣

[$g(x)$ 側]　e^{ax} >> $\sin bx,\ \cos bx$ >> x^n >> $\log x$　[$f(x)$ 側]

２）部分積分法と対象となる代表的なもの

[基本形]　xe^{ax}　$x\sin bx$　$x\cos bx$　$x^n\log x$

[応用①]　x^2e^{ax}　$x^2\sin bx$　$x^2\cos bx$　$x^n(\log x)^2$

[応用②]　$e^{ax}\sin bx$　$e^{ax}\cos bx$

[特殊①]　$\log x$　$\mathrm{Sin}^{-1}x$　$\mathrm{Tan}^{-1}x$

[特殊②]　$\sqrt{a^2-x^2}$　$\sqrt{x^2+A}$

（※応用は部分積分法を２回行う場合，
特殊は $n=0$ の場合，②は同じ形を作る場合）

例題　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\ dx$ を計算せよ。

［解答］ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\ dx$

$= \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx$　　：$0\times\cos 0 = 0\times 1 = 0$

$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$　　：$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$　　：$\sin\frac{\pi}{2} = 1$，　$\sin 0 = 1$

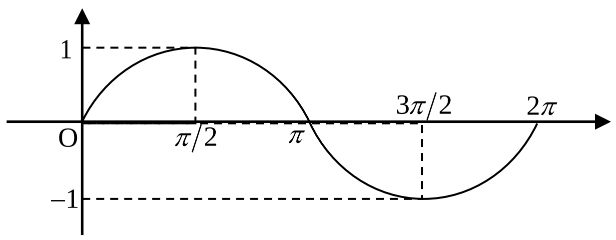
問 10.4　次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\ dx$　　　(2) $\int_1^e \log x\ dx$

＝＝

【参考】 $x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ の三角関数の値はグラフから求めるのが早い！

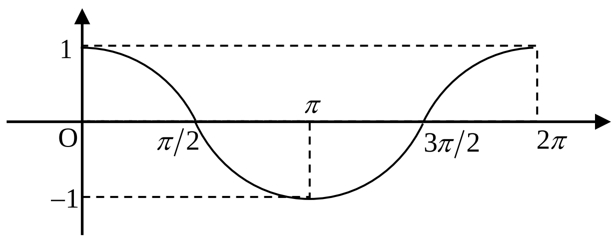
１） $y=\sin x$



グラフは，$\frac{\pi}{2}(=90^\circ)$ 毎に　[中→上→中→下→中]　を繰り返すので

値は，順に　$\sin 0 = 0$　$\sin\frac{\pi}{2} = 1$　$\sin\pi = 0$　$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$　$\sin 2\pi = 0$

２） $y=\cos x$



グラフは，$\frac{\pi}{2}(=90^\circ)$ 毎に　[上→中→下→中→上]　を繰り返すので

値は，順に　$\cos 0 = 1$　$\cos\frac{\pi}{2} = 0$　$\cos\pi = -1$　$\cos\frac{3}{2}\pi = 0$　$\cos 2\pi = 1$

＝＝