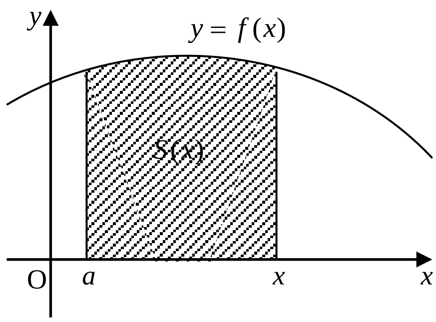
第 10 章　定積分

§１　定積分

1.1　微分と積分の基本定理

微分と積分の基本定理とは？

まず，$y=f(x)$ は正値関数とします。
このとき，右図のような
「a から x までの部分の面積」
を　$S(x)$ で表します

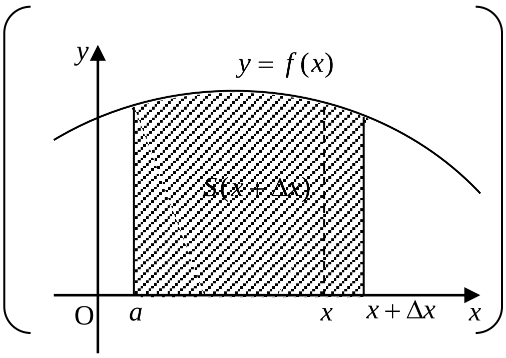


x の場所によって，面積 $S(x)$ の値は
変化するので，$S(x)$ は関数です。

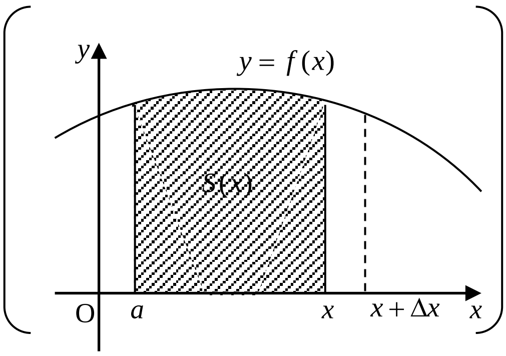
このとき，$S(x)$ の微分を考えます。つまり，次式を計算します。

［微分の定義式］　$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta x}$

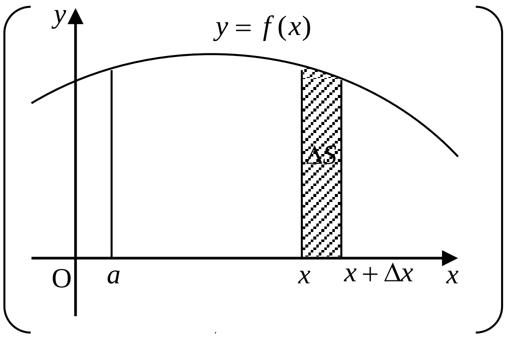
$S(x+\Delta x)-S(x)=$

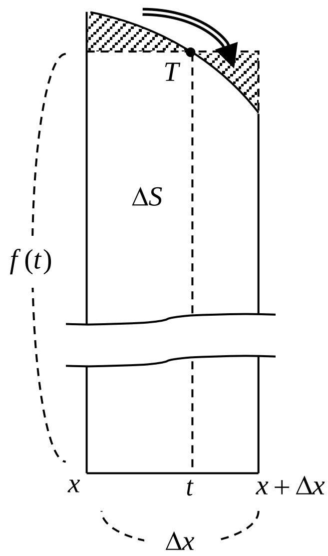


−



=





次に，面積ΔSを
長方形の面積で表します。

上部の曲線部分を
均(なら)して平らにします。

このとき，長方形の上部と
曲線$f(x)$が交わる点をTとする。

点Tのx座標を tとすると
長方形の高さが点Tのy座標$f(t)$
となることが導けます。

つまり　　$\Delta S = f(t)\Delta x$　（但し　$x \leqq t \leqq x+\Delta x$）

それでは，最初の微分の話に戻ります。

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) \cdots ①$$

このとき，$x \leqq t \leqq x+\Delta x$から

$\Delta x \to 0$　のとき　$t \to x$　を導くことができるので

①より，次の関係式が導けます。

［微分と積分の基本定理］　$S'(x) = f(x)$

1.2　定積分

定積分の新しい記号を紹介します。

「微分と積分の基本定理」は

「aからxまでの部分の面積$S(x)$」が，

「関数$f(x)$の無数にある不定積分の中の１つ」で

あることを意味します。

よって，「関数$f(x)$の原始関数$F(x)$」を用いて

$S(x) = F(x) + C$　$\cdots ①$　［次頁で積分定数Cを１つに特定する］

と表記できることになります。

特に，$S(a)=0$ であることに注意すると，

（※ a から a までの部分は線になるので，面積は 0 です！）

①より　$0=S(a)=F(a)+C$　　　$\therefore C=-F(a)$　…②

今回，「a から b までの部分の面積 $S(b)$」を表す記号を
不定積分の記号と似せた記号として，次の様に表記します。

［定積分の記号］　$\int_a^b f(x)\ dx$

このように，「a から b まで」という内容を，不定積分の記号に
付加したものを**定積分の記号**として用います。

また、実際の計算は「a から b までの部分の面積 $S(b)$」より

$$\int_a^b f(x)\ dx=S(b)$$

$$=F(b)+C \qquad [\text{①より}]$$

$$=F(b)-F(a) \qquad [\text{②より}]$$

【注意】今後，$F(b)-F(a)$ という計算を記号 $\left[F(x)\right]_a^b$ で表す。

［計算記号］　$\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

関数 $f(x)$ に対して，次の様な計算を行うことを，**定積分を計算する**という。

［定 積 分］　$\int_a^b f(x)\ dx=\left[F(x)\right]_a^b$

【注意】次の様な計算を行うことを，**不定積分を求める**という。

［不定積分］　$\int f(x)\ dx=F(x)+C$ （C は積分定数）

1.3　定積分の拡張

（拡張とは？）

現在は，正値関数 $f(x)$ を用いて，定積分を定義しました。

[※正値関数とは x 軸の上側にある関数を意味する]

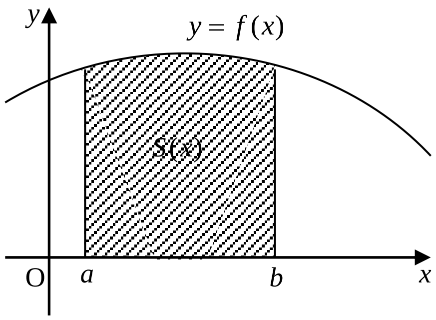
［定積分］　$f(x) \geqq 0$ のとき　$\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b$

また，このときの計算結果は

$y = f(x)$，　$x = a$，　$x = b$　及び　x 軸とで囲まれた部分の面積 S

になります。

つまり　　$\int_a^b f(x)\ dx = S$



次の２点を組込み，我々は一般の関数へ定積分を拡張します。

１）$f(x) \leqq 0$　のとき　$\int_a^b \{-f(x)\}\ dx = S\ \left(\Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ dx = -S\right)$

※ $f(x) \leqq 0\ \Rightarrow\ -f(x) \geqq 0$　であるから
　正値関数 $\{-f(x)\}$ に対して，定積分の計算を行う。
　つまり，負値関数[x 軸の下側にある関数]の定積分は
　　　　　　　囲まれた部分の面積の負の値($-S$)とする。

２）左[a]から右[b]への定積分に対して，

　　右[b]から左[a]への定積分の計算を，次式で定める。

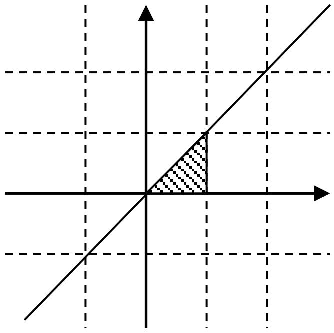
$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx\left(= -S\right)$$

※定積分を行う x の範囲を，**積分範囲**という。
　積分範囲を反転させた場合も，
　　　　　　　囲まれた部分の面積の負の値($-S$)とする。

＝＝

【参考】前頁の内容を少しだけ具体的に解説します。

［1 目盛りは 1 とする］

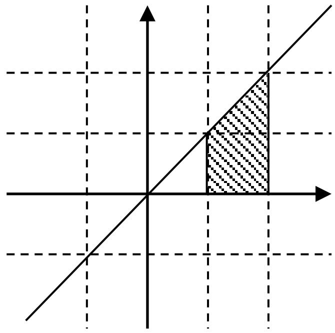


問１　右図(三角形)の面積 S を求めよ。

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

これを，定積分で計算すると

$$S = \int_0^1 x\ dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$



問２　右図(台形)の面積 S を求めよ。

$$S = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 = \frac{3}{2}$$

これを，定積分で求めると

$$S = \int_1^2 x\ dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

このように，$y = f(x)$ [今回は $y = x$]，$x = a$，$x = b$ 及び x 軸で囲まれた部分の面積 S を，定積分で求めることができます。

［1 点目の組込み内容］

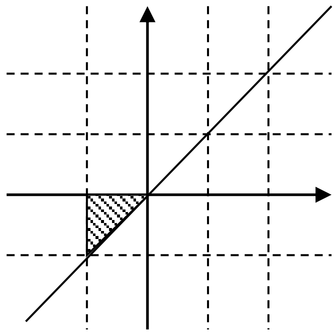
x 軸の下側にある場合です。

右図の定積分の値はどうなるでしょう。

実際に計算すると

$$\int_{-1}^0 x\ dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

面積の負値になることが確認できます。



［2 点目の組込み内容］

問２の定積分において，積分範囲を反転して計算してみます。

$$\int_2^1 x\ dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \left(= -\int_1^2 x\ dx \right)$$

「積分範囲の反転」は「正負の反転」になることが確認できます。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

1.4　定積分［その２］

名称等の説明を付加します。

「上端」　「被積分関数」

「原始関数($C=0$)」

［定積分の記号］

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \underbrace{\Big[F(x)\Big]_a^b}$$

「下端」　「(上端を代入した値)から(下端を代入した値)を引く」

○読み：インテグラル　エイ　ビィ　エフ　エックス　ディ　エックス

(※下端，上端の順で読む)

実際は，「a から b まで $f(x)$ を積分する」と述べた方が簡便です。

○下端と上端の間の範囲を，**積分範囲**という。

○積分範囲は，通常「下端から上端まで」である。

尚，積分範囲を反転する(上端と下端を入替える)と，

定積分の値の正負が反転する。

○定積分の記号 $\int_a^b \quad dx$ の内側にある関数 $f(x)$ を**被積分関数**という。

○ $F(x)$ は，被積分関数 $f(x)$ の**原始関数**である。

このTEXTでは，無数にある不定積分の中で，

特に「積分定数 C が0の場合」を原始関数と呼んでいる。

○原始関数 $F(x)$ に，上端($x=b$)を代入した値 $F(b)$ から，

下端($x=a$)を代入した値 $F(a)$ を引く。

という作業を，**定積分**を計算するという。

［定積分］　$\int_a^b f(x)\ dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$

1.5　例題

例題　次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\ dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\ dx$

［解答］(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

(2) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\ dx = \left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\cos\frac{\pi}{4} - \left(-2\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -2\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

(3) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\ dx = \left[\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log\left|\frac{-1}{3}\right| - \frac{1}{4}\log\left|\frac{-2}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\log 1 = \frac{1}{4}\log 3^{-1} - \frac{1}{4}\times 0 = -\frac{1}{4}\log 3$$

問 10.1　次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^4\ dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

(4) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\ dx$　　(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ dx$

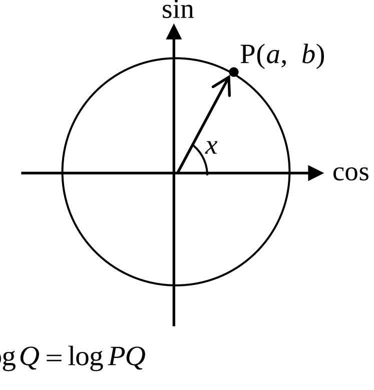
(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$　　(8) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\ dx$　　(9) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\ dx$

【注意】 1） 次の 3 つの値は，「110 番」として覚える！

①$e^0 = 1$　　②$\log e = 1$　　③$\log 1 = 0$

2） 三角関数の主要な値

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	×



3） 三角関数の定義[右図参照]

$\sin x = b$，　$\cos x = a$

4） 対数関数の性質　　①$\log P + \log Q = \log PQ$

②$\log P - \log Q = \log\dfrac{P}{Q}$　　③$\log P^k = k\log P$

＝＝＝

【参考】

［基本公式］

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

［実践的な公式］

$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\times\frac{1}{n+1}(ax+b)^n$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log\lvert ax+b\rvert$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$
$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$

［基本公式２］

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=\log\lvert x+\sqrt{x^2+A}\rvert+C$

［簡便な公式］ $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log\lvert f(x)\rvert+C$

［部分積分法］ $\displaystyle\int f(x)g(x)dx=\int f(x)G'(x)\,dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)\,dx$

（※使用する代表的な被積分関数： xe^{ax}, $x\sin ax$, $x\cos ax$, $x^n\log x$, $\log x$）

［置換積分法］ $u=g(x)\cdots$① とおくと $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ $\therefore dx=\dfrac{du}{g'(x)}\cdots$②

①と②より $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\cancel{g'(x)}\times\frac{du}{\cancel{g'(x)}}=\int f(u)\,du$

＝＝＝