5.6　部分積分法（発展）

部分積分法の応用を紹介します

○部分積分法の公式の復習です。

［部分積分法］　$\int f(x)g(x)\ dx = \int f(x)G'(x)\ dx$

$$= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\ dx$$

○部分積分法を用いる基本的な形は

x と e^{ax}，　$\sin ax$，　$\cos ax$，　$\log x$　との積です。

［部分積分法を用いる積分(基本)］

$$\int xe^{ax}dx\ ,\quad \int x\sin ax\ dx\ ,\quad \int x\cos ax\ dx\ ,\quad \int x^n \log x\ dx$$

※応用の形は　e^{ax} と $\sin bx$，　$\cos bx$　との積です

［部分積分法を用いる積分(応用)］

$$\int e^{ax}\sin bx\ dx\ ,\quad \int e^{ax}\cos bx\ dx$$

○今回の発展は，基本的な形の特殊ケース$[n=0]$として紹介した方法です。

［特殊ケース］　$\int \log x\ dx \left(= \int 1\times \log x\ dx\right) = \int (x)'\log x\ dx$

$$= x\log x - \int \left(x \times \frac{1}{x}\right)dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$$

※例題，演習，課題として扱うのは，次の４つの不定積分です。

［部分積分を用いる積分(発展)］

$$\int \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\ dx\ ,\quad \int \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\ dx\ ,\quad \int \sqrt{a^2-x^2}\ dx\ ,\quad \int \sqrt{x^2+A}\ dx$$

例題　不定積分 $\int \mathrm{Sin}^{-1} x\, dx$ を求めよ。

［解答］ $\int \mathrm{Sin}^{-1} x\, dx = \int (x)' \,\mathrm{Sin}^{-1} x\, dx$

$$= x\,\mathrm{Sin}^{-1} x - \int \left(x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

いま　$u = 1 - x^2 \cdots$①　とおくと　$\dfrac{du}{dx} = -2x$　　$\therefore\ dx = \dfrac{du}{-2x} \cdots$②

①と②より　（与式）$= x\,\mathrm{Sin}^{-1} x - \int \dfrac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \times \dfrac{du}{-2\cancel{x}} = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + \dfrac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\, du$

$$= x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + u^{\frac{1}{2}} + C = x\,\mathrm{Sin}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

課題　不定積分 $\int \mathrm{Tan}^{-1} x\, dx$ を求めよ。

例題　不定積分 $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ を求めよ。

［解答］ $\boxed{\int \sqrt{x^2+1}\, dx} = \int (x)' \sqrt{x^2+1}\, dx$　　※ $x^2+1 = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \left(x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \boxed{\int \sqrt{x^2+1}\, dx} + \log|x + \sqrt{x^2+1}|$$

同じ形

よって　$2\int \sqrt{x^2+1}\, dx = x\sqrt{x^2+1} + \log|x+\sqrt{x^2+1}| + c$

$\therefore\ \int \sqrt{x^2+1}\, dx = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log|x+\sqrt{x^2+1}| \right) + C$　（但し　$C = c/2$）

問 9.14　不定積分 $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ を求めよ。

＝＝＝

【参考】一般的な公式は，次の様に証明することができます。

［発展公式］ (1) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2}\log(x^2 + a^2) + C$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + A}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2 + A} + A\log|\,x + \sqrt{x^2 + 1}\,|\right\} + C$

＝＝＝

5.7　三角関数を含む不定積分

置換積分の応用(続)を紹介します。

〇三角関数を含む積分の置換積分法

［置換方法］　$u = \tan\dfrac{x}{2}$　とおく。

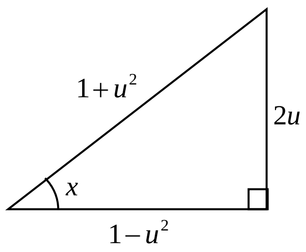
このとき，

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$



準備）加法定理　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

倍角公式［$\alpha = \beta = \theta$ のとき］

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

基本公式　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\left(\Rightarrow\quad \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$$

証明） $\theta = \dfrac{x}{2} \quad (\Rightarrow \quad x = 2\theta)$ とおくと $u = \tan\dfrac{x}{2} = \tan\theta$

○ $\sin x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos^2\theta = 2\times\tan\theta\times\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2u}{1+u^2}$

○ $\cos x = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta\left(1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\left(1-\tan^2\theta\right) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

○ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\dfrac{2u}{1+u^2}}{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} = \dfrac{2u}{1-u^2}$

○ $u = \tan\dfrac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = \mathrm{Tan}^{-1}u \qquad \therefore\ x = 2\mathrm{Tan}^{-1}u$

よって $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{2}{1+u^2} \qquad \therefore\ dx = \dfrac{2}{1+u^2}du$

例題　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

［解答］(1) $u = \tan\dfrac{x}{2}$ ⋯① とおくと $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$， $dx = \dfrac{2}{1+u^2}du$ ⋯②

①と②より $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx = \int\frac{1}{1+\left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right)}\times\frac{2}{\boxed{1+u^2}}du$

$$= \int\frac{2}{(1+u^2)+2u}du = \int\frac{2}{u^2+2u+1}du$$

$$= \int\frac{2}{(u+1)^2}du = 2\int(u+1)^{-2}du$$

$$= -2(u+1)^{-1}+C = \frac{-2}{u+1}+C$$

$$= \frac{-2}{1+\tan(x/2)}+C$$

(2) $u=\tan\dfrac{x}{2}\cdots①$　とおくと　$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+u^2}du\cdots②$

①と②より　$\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\times\frac{2}{1+u^2}du=\int\frac{2}{1-u^2}\,du$

このとき　$\dfrac{2}{1-u^2}=\dfrac{2}{(1-u)(1+u)}=\dfrac{p}{1-u}+\dfrac{q}{1+u}$　とおくと

$2=p(1+u)+q(1-u)$

恒等式より　$u=1$　を代入　$2=2p$　　$\therefore\ p=1$

$u=-1$　を代入　$2=2q$　　$\therefore\ q=1$

よって　$\displaystyle(\text{与式})=\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$

$=\log|1+u|-\log|1-u|+C$

$=\log\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right|+C=\log\left|\dfrac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|+C$

問 9.15　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1-\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{2+\cos x}dx$

課題では，次の問題を出題しています。

課題　(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$

お疲れ様でした。次回からは，新しい内容『定積分』に入ります。