5.3　置換積分法(発展)

引き続き，特殊な置換積分を紹介します。

○ $\sqrt{x^2+A}$ を含む積分の置換積分法

[置換方法]　$u=x+\sqrt{x^2+A}\cdots①$　とおく。

①より　$u-x=\sqrt{x^2+A}$

両辺を２乗する　$u^2-2ux+x^2=x^2+A$

$$2ux=u^2-A \qquad \therefore x=\frac{u^2-A}{2u}\cdots②$$

このとき

$$\sqrt{x^2+A}=u-x=u-\frac{u^2-A}{2u}=\frac{2u^2-(u^2-A)}{2u}=\frac{u^2+A}{2u}\cdots③$$

$$\frac{dx}{du}=\frac{2u\times 2u-(u^2-A)\times 2}{4u^2}=\frac{4u^2-2u^2+2A}{4u^2}$$

$$=\frac{2u^2+2A}{4u^2}=\frac{u^2+A}{2u^2} \qquad \therefore dx=\frac{u^2+A}{2u^2}\,du\cdots④$$

②～④を「与式」に代入する。

例）$u=x+\sqrt{x^2+A}$　とおくと

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{1}{\frac{u^2+A}{2u}}\times\frac{u^2+A}{2u^2}\,du=\int\frac{(u^2+A)}{u(u^2+A)}du$$

$$=\int\frac{1}{u}du=\log|u|+C=\log|x+\sqrt{x^2+A}|+C$$

＝＝

【参考：前回の新しい基本公式】

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$　　(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=\log|x+\sqrt{x^2+A}|+C$

＝＝＝

○ $\sqrt{a^2-x^2}$ を含む積分の置換積分法

[置換方法]　$x = a\sin u \cdots$①　とおく。

①より　$a^2-x^2 = a^2-a^2\sin^2 u = a^2(1-\sin^2 u) = a^2\cos^2 u$

$\therefore \sqrt{a^2-x^2} = a\cos u \cdots$②

①を微分すると　$\dfrac{dx}{du} = a\cos u$　　$\therefore dx = a\cos u\ du \cdots$③

①～③を「与式」に代入する。

※最後 u から x に戻すとき，次式を用いる。

①より　$\sin u = \dfrac{x}{a}$　　$\therefore u = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) \cdots$④

例）$x = a\sin u$　とおくと

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{a\cos u} \times a\cos u\ du = \int du = u + C = \mathrm{Sin}^{-1}u + C$$

○ x^2+a^2 を含む積分の置換積分法

[置換方法]　$x = a\tan u \cdots$①　とおく。

①より　$x^2+a^2 = a^2\tan^2 u + a^2 = a^2(\tan^2 u+1) = \dfrac{a^2}{\cos^2 u} \cdots$②

①を微分すると　$\dfrac{dx}{du} = \dfrac{a}{\cos^2 u}$　　$\therefore dx = \dfrac{a}{\cos^2 u}\ du \cdots$③

①～③を「与式」に代入する。

※最後 u から x に戻すとき，次式を用いる。

①より　$\tan u = \dfrac{x}{a}$　　$\therefore u = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) \cdots$④

例）$x = a\tan u$　とおくと

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{1}{\dfrac{a^2}{\cos^2 u}} \times \frac{a}{\cos^2 u}du$$

$$= \int \frac{a}{a^2}du = \frac{1}{a}\int du = \frac{1}{a}u + C = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

5.4　部分分数分解

部分分数分解による積分を紹介します。

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x-3)(x-1)}dx$ を求めよ。

［解答］１）部分分数分解を行う。

$$\frac{x+5}{(x-3)(x-1)} = \frac{p}{x-3} + \frac{q}{x-1}$$ とおくと

$$x+5 = p(x-1)+q(x-3)$$

恒等式より　$x=3$ を代入すると　$8=2p$　　$\therefore\ p=4$

$x=1$ を代入すると　$6=-2q$　　$\therefore\ q=-3$

よって　$$\frac{x+5}{(x-3)(x-1)} = \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-1}$$

２）不定積分を求める

$$\int \frac{x+5}{(x-3)(x-1)}dx = \int\left(\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x+3}\right)dx$$

$$= 4\log|x-3| - 3\log|x+3| + C$$

$$= \log(x-3)^4 - \log|x+3|^3 + C$$

$$= \log\frac{(x-3)^4}{|x+3|^3} + C$$

【復習】対数関数の性質

(1)　$\log P + \log Q = \log PQ$　　(2)　$\log P - \log Q = \log\dfrac{P}{Q}$

(3)　$\log P^k = k\log P$

【注意】「絶対値| |」 と「括弧(　)」 の表記

正の数に対して，絶対値を書く必要はありません。

偶数乗を行うと，全ての実数は正の数になります。

よって，次の命題が成り立ちます。

◎　n が偶数　⇒　$|x+a|^n = (x+a)^n$

問 9.12　　部分分数分解を用いて，前回の新しい基本公式(1)を証明せよ。

［新しい基本公式］　(1) $$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

5.5　部分分数分解(応用)

応用問題を紹介します

○１次式$(x+a)$　と１次式$(x+b)$の部分分数分解

$$\frac{mx+n}{(x+a)(x+b)}=\frac{p}{x+a}+\frac{q}{x+b}$$ とおいて，　p，q　を求める

※特殊ケース($b=a$ の場合)の部分分数分解

[0]　$$\frac{mx+n}{(x+a)^2}=\frac{p}{(x+a)^2}+\frac{q}{x+a}$$

○　１次式$(x+a)$　と２次式(x^2+bx+c)の部分分数分解は

$$\frac{lx^2+mx+n}{(x+a)(x^2+bx+c)}=\frac{p}{x+a}+\frac{qx+r}{x^2+bx+c}$$ とおいて，　p，q　を求める

※２次式(x^2+bx+c)が因数分解可能な場合は，
先ほどの「1 次式と 1 次式の部分分数分解」が適用できる。
よって，特殊ケースもいれると，次の様な部分分数分解になる。

[1]　$$\frac{lx^2+mx+n}{(x+a)(x+b)(x+c)}=\frac{p}{x+a}+\frac{q}{x+b}+\frac{r}{x+c}$$

[2]　$$\frac{lx^2+mx+n}{(x+a)^2(x+b)}=\frac{p}{(x+a)^2}+\frac{q}{x+a}+\frac{r}{x+b}$$

[3]　$$\frac{lx^2+mx+n}{(x+a)^3}=\frac{p}{(x+a)^3}+\frac{q}{(x+a)^2}+\frac{r}{x+a}$$

【注意】不定積分　$\displaystyle\int\left(\frac{p}{x+a}+\frac{qx+r}{x^2+bx+c}\right)dx$ を解くにあたり

１）第１項は　$\displaystyle\int\frac{p}{x+a}\,dx=p\log|x+a|+C$　ですね。

２）第２項は，次のような式の変形と公式が必要です。

$$\int\frac{mx+n}{x^2+a^2}\,dx=\frac{m}{\boxed{2}}\int\frac{\boxed{2}x}{x^2+a^2}dx+n\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{m}{2}\log(x^2+a^2)+\frac{x}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$ を求めよ。

［解法］　１）部分分数分解

$$\frac{7x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{p}{x-1} + \frac{qx+r}{x^2+2x+5}$$ とおくと

$$7x+9 = p(x^2+2x+5) + (x-1)(qx+r)$$

恒等式より　$x=1$ を代入　$16=8p$　$\therefore p=2$

$x=0$ を代入　$9=5p-r$　$\Rightarrow$　$9=10-r$　$\therefore r=1$

$x=2$ を代入　$23=13p+2q+r$

$\Rightarrow$　$23=26+2q+1$　$\therefore q=-2$

よって　$$\frac{7x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+2x+5}$$

$$= \frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2+2x+5}$$

２）不定積分

$$\int \frac{7x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\right)dx$$

$$= 2\log|x-1| - \int\left\{\frac{(\boxed{2x+2})-3}{x^2+2x+5}\right\}dx$$

（※分母の微分に相当する部分を作る）

$$= 2\log|x-1| - \int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int\frac{-3}{x^2+2x+5}dx$$

$$= 2\log|x-1| - \log(x^2+2x+5) + 3\int\frac{1}{(x+1)^2+4}dx$$

$$= \log\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+5} + \frac{3}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

※平方完成：$x^2+2x+5=(x+1)^2-1+5=(x+1)^2+4$

２乗[正の数]に４を足すので，必ず正の数になる。

よって，「絶対値| |」でなく「丸括弧( )」でよい。

問 9.13　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx$ を求めよ。