7.4 応用

まずは，長さの公式の確認から

閉区間 $a \leqq x \leqq b$ における曲線 $y=f(x)$ の線長 L は，次で与えられる。

［長さ］ $L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ dx$

応用の内容は，根号（$\sqrt{\ }$）内が，２乗の形になります。
つまり $1+\{f'(x)\}^2=(\quad)^2$ と変形できる問題です。

例題 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ （$-1 \leqq x \leqq 1$）の長さ L を求めよ。

［解答］① $y'=f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

［※指数法則：$(a^m)^n=a^{mn}$ ］

② $1+\{f'(x)\}^2=1+\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{4}=\dfrac{4}{4}+\dfrac{\boxed{e^{2x}}-2e^xe^{-x}+\boxed{e^{-2x}}}{4}$

$=\dfrac{4}{4}+\dfrac{e^{2x}-2\times\boxed{1}+e^{-2x}}{4}=\dfrac{4}{4}+\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$

（ ※指数法則：$a^m \times a^n=a^{m+n}$ ）

$=\dfrac{(e^x)^2+2e^xe^{-x}+(e^{-x})^2}{4}$

注意！

$=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$

③ $L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ dx=\int_{-1}^1 \sqrt{\dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}\ dx=\int_{-1}^1 \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\ dx$

$=2\int_{\boxed{0}}^1 \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\ dx=\int_0^1 (e^x+e^{-x})\ dx=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1$

$=(e-e^{-1})-(1-1)=e-e^{-1}$

（偶関数：実際 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とすると

$f(-x)=\dfrac{e^{(-x)}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$ ）

問 10.23 曲線 $y=\dfrac{x^2}{8}-\log x$ （$1 \leqq x \leqq e$）の長さ L を求めよ。

§８　広義積分

8.1　広義積分

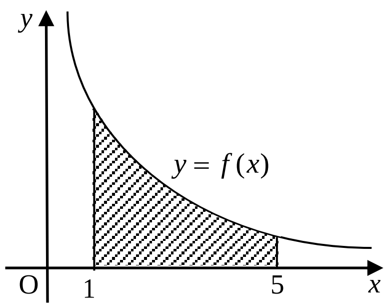
広義積分とは？

通常の定積分は,

　◎曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$， $x = b$ 及び

　x 軸で囲まれている必要があります。

［通常］ $S = \int_1^5 f(x)\ dx$



今回は

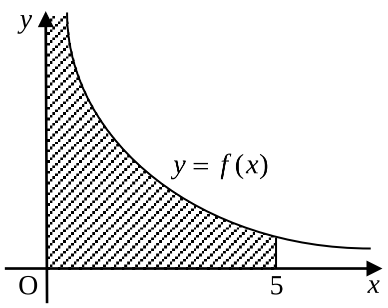
　①左端(又は右端)で上部へ抜けていく場合　と

　②左端(又は右端)が横側へ抜けていく場合　を

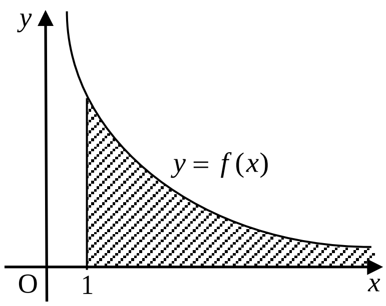
取り扱います。

このような場合の定積分を，**広義積分**といいます。

［広義積分①］ $S = \int_0^5 f(x)\ dx$



［広義積分②］ $S = \int_1^\infty f(x)\ dx$



【注意】

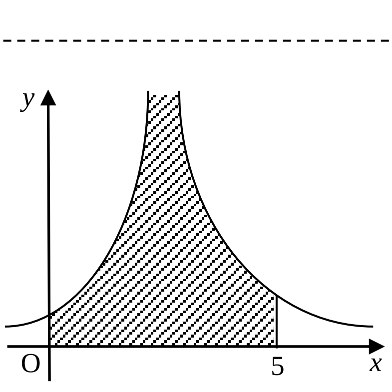
“抜け”は，必ず左端又は右端で起こる

ように，積分範囲を設定します。

つまり，内部で“抜け”が起こるような

積分範囲の設定は誤りとなります。

［×(誤り)］ $S = \int_0^5 f(x)\ dx$



8.2　縦向きの漸近線をもつ場合

広義積分①の内容です。

特色：積分範囲[$a \leqq x \leqq b$]の左端[$x=a$]又は右端[$x=b$]において

分数関数の場合は，分母の値が 0[グラフ上では縦向きの漸近線]となる。

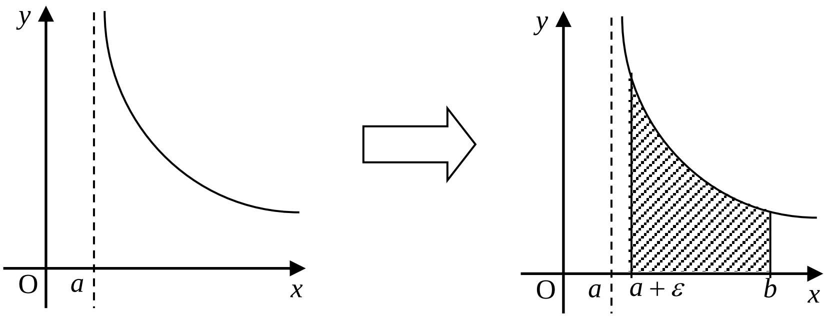
対数関数の場合は，真数[対数の中身]が 0 になる。など

計算手法[$x=a$ が漸近線となる場合]

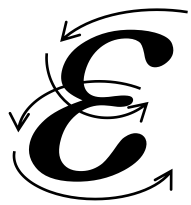
(1) 積分範囲を　$a+\varepsilon \leqq x \leqq b$　とすることにより囲まれる部分を作り，

定積分による近似値を計算する。

[定積分(近似)]　$S_\varepsilon = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$

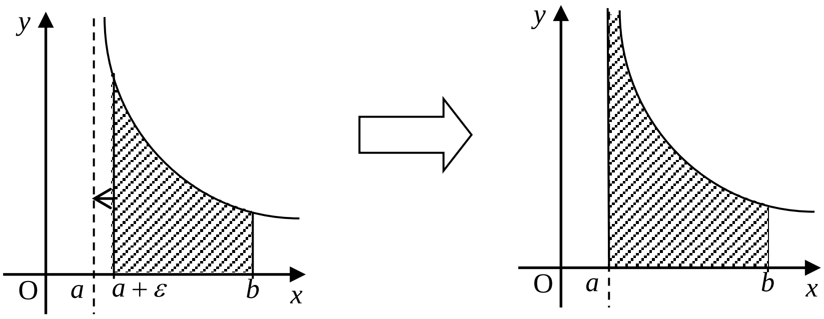


※ギリシア(小)文字　ε　は，
イプシロンと発音します。
数学では，小さい正数として
使用されます。



(2) ε を 0 に近づけることで，広義積分の値を求めます。

[定積分(極限)]　$S = \lim_{\varepsilon \to 0} S_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$



それでは，公式としてまとめておきます。

［広義積分①］

1） $x=a$ が漸近線となる場合　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

2） $x=b$ が漸近線となる場合　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

【注意】囲まれる部分は，積分範囲$[a\leqq x\leqq b]$の内側に作るので

1） $x=a$ が漸近線となる場合は　$a+\varepsilon\leqq x\leqq b$

2） $x=b$ が漸近線となる場合は　$a\leqq x\leqq b-\varepsilon$

となるので，ε の前の符号に注意してください

8.3　横向きの漸近線をもつ場合

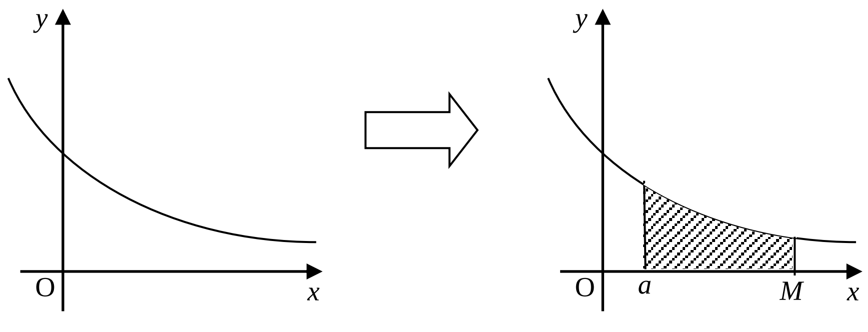
広義積分②の内容です。

特色：積分範囲に無限大[∞]を含みます。

計算手法[積分範囲が　$a\leqq x<+\infty$　の場合]

(1) 積分範囲を　$a\leqq x\leqq M$　とすることにより囲まれる部分を作り，
定積分による近似値を計算する。

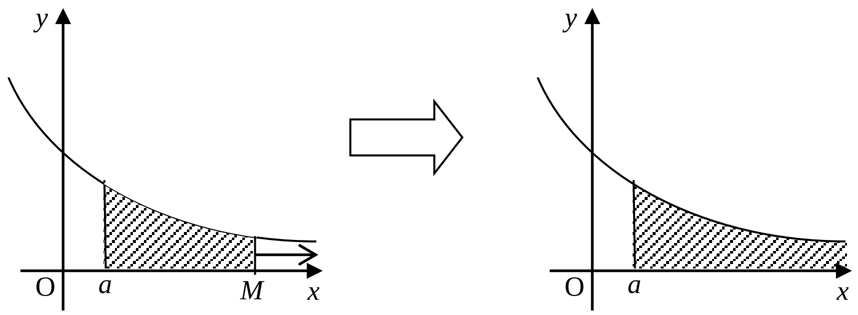
[定積分(近似)]　$S_M=\displaystyle\int_a^M f(x)\,dx$



(※小さな正数 ε に対して，M は大きな正数を意味します)

(2) M を∞に近づけることで，広義積分の値を求めます。

[定積分(極限)]　　$S=\lim_{M\to\infty}S_M=\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx=\int_a^{\infty}f(x)\,dx$



それでは，公式としてまとめておきます。

［広義積分②］

1）積分範囲が　$a\leqq x<+\infty$　の場合　$\int_a^{\infty}f(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$

2）積分範囲が　$-\infty<x\leqq b$　の場合　$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{b}f(x)\,dx$

8.4　例題

例題　次の広義積分を計算せよ。

(1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$　　　　(2) $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$

［解説］(1) 左端$[x=0]$で分母が 0，つまり広義積分である。

(2) 右端に無限大$[\infty]$を含んでいるので，広義積分である。

［解答］(1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0}2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)=2$$

(2) $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^M x^{-2}\,dx=\lim_{M\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^M$

$$=\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}+1\right)=1$$

問 10.24　次の広義積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

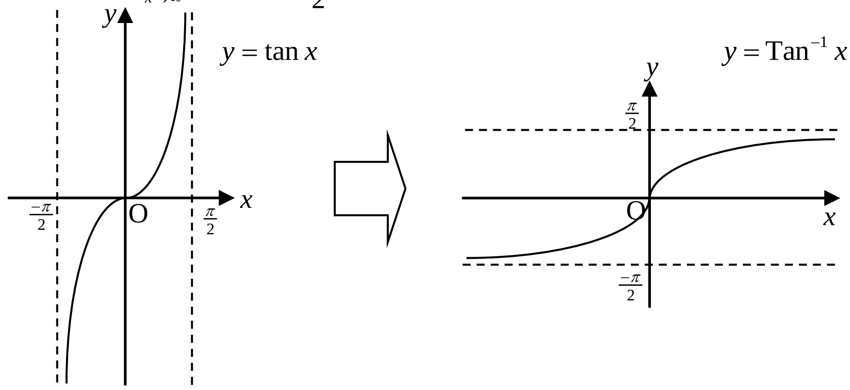
(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

Hint[その１]　積分公式

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2+A}| + C$$

Hint[その２]　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\mathrm{Tan}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$　[逆関数のグラフは，直線 $y=x$ に対称]



例題　次の広義積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\big[\log|x|\big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\{-\log(\varepsilon)\} = +\infty$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\big[\log|x|\big]_1^M = \lim_{M\to\infty}\log(M) = +\infty$

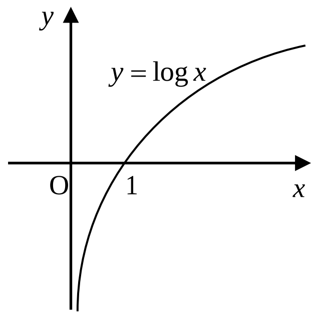
［注意］広義積分の計算は，数値になる(**収束**する)場合だけではない。

この例題の様に，正の無限大になる(**発散**する)場合もあります。

※確認　□ $\log 1 = 0$

□ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x = -\infty$

□ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$



＝＝

【研究】広義積分 $\int_0^1 \log x\, dx$ を求めよ。

[※編入学試験問題に出題されてもいいような問題です。]

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \log x\, dx$$ ：左端$[x=0]$で真数を 0 にするから広義積分

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 (x)'\log x\, dx$$ ：部分積分を適用

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[x\log x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \left(x\times\frac{1}{x}\right) dx\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\varepsilon\log\varepsilon - \int_\varepsilon^1 dx\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\varepsilon\log\varepsilon - \left[x\right]_\varepsilon^1\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\varepsilon\log\varepsilon-(1-\varepsilon)\right\}$$

$$= -1-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\varepsilon$$ ：直接計算は$0\times(-\infty)$より，不定形

$$= -1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}$$ ：ロピタルの定理を適用

$$= -1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1-\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = -1+0 = -1$$ （収束）

計算についてこれましたか？

＝＝＝

課題 $\boxed{12}$(3)(4)の解答

(3) $$\int_1^2 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log|x^2-1|\right]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log 3-\log\{(1+\varepsilon)^2-1\}\right] = \log 3-(-\infty) = +\infty$$ （発散）

（※形式的に　$\log(+0) = -\infty,\quad \log(+\infty) = +\infty$）

(4) $$\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_2^M \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^M = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\left(\log\frac{M-1}{M+3}-\log\frac{1}{3}\right)$$

$$= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\left(\log\frac{1-\frac{1}{M}}{1+\frac{3}{M}}-\log 3^{-1}\right) = \frac{1}{2}(\log 1+\log 3) = \frac{1}{2}\log 3$$