§６　体積

6.1　復習

まずは，復習から

［区分求積法］　$\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \Delta x = \int_a^b f(x)\ dx$

※今回は，新しい積分公式を作ります。
その時に，次の様な変換を行います。

① $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\sum_{k-1}^{n}$ $\to$ $\displaystyle \int_a^b$

② x_k $\to$ x（番号 k をトル）

③ Δx $\to$ dx

①

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}}\ f(x_k)\ \underline{\underline{\Delta x}} = \boxed{\int_a^b}\ f(x)\ \underline{\underline{dx}}$$

②

③

【参考】総和の記号 $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ は，a から b までの間の n 個の値 $f(x_k)$ を

加算するものなので，**離散型の合計**を意味します。
さて，「合計」の英語は Sum ですね。

この頭文字 S を縦に引き伸ばしたものが，積分記号 $\int$ です。

つまり，積分記号 $\displaystyle \int_a^b$ は a から b までの間のすべての値 $f(x)$ を

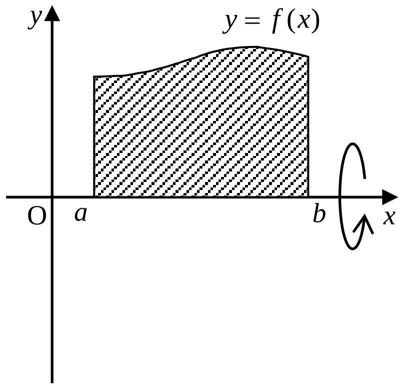
加算するものなので，**連続型の合計**を意味します。
「離散型」を「連続型」に変えるものが無限分割（極限操作）です

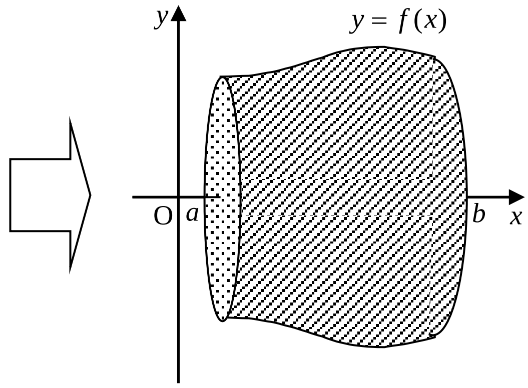
6.2　体積

体積に関する積分公式を導く。

閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において
曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a,\ x = b$ 及び x 軸とで囲まれた図形を，
x 軸周りに回転してできる回転体の体積 V は，次で与えられる。

［体積］　$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\ dx$



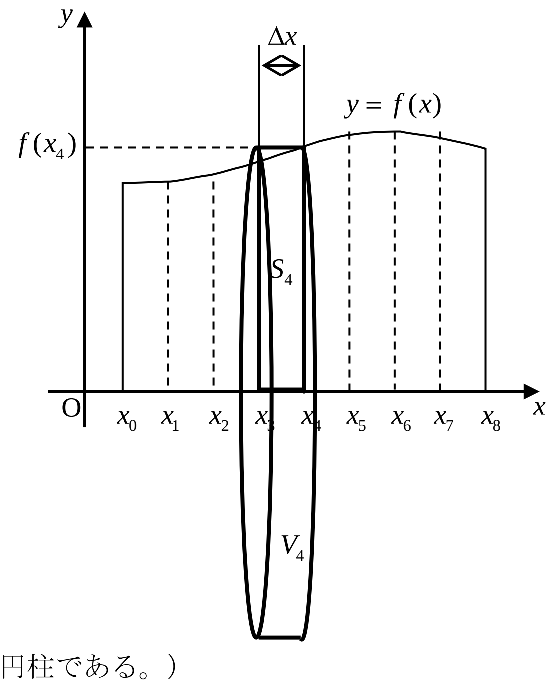


区分求積法と同じ手順を踏みます。

手順１：閉区間 $a \leqq x \leqq b$ を，n 等分に分割します。
n 等分された分点を，次の様に設定します。
［分　　点］　$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
また，各小閉区間 $x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$ の分割の幅を Δx とする。
［分割の幅］　$\Delta x = x_k - x_{k-1}$

手順２：各小閉区間の右端 $x = x_k$ に対応する関数の
値 $y = f(x_k)$ を高さとする小長方形を S_k とする。
この小長方形 S_k を，x 軸のまわりに回転してできる
小円柱を V_k とする。また，同じ記号 V_k はその小円柱の
体積を表すものとする。
［小 円 柱］　$V_k = \pi\{f(x_k)\}^2\ \Delta x$

（※ V_k は半径 $r = f(x_k)$ の円を底面とする高さ $h = \Delta x$ の小円柱である。）



手順３：各小円柱の体積V_kの総和は，曲線$y=f(x)$と直線$x=a,\ x=b$及びx軸とで囲まれた図形Sをx軸の周りに回転してできる回転体の体積Vの近似となる。

[近 似 式]　$V \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} V_k = \pi \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)\}^2\ \Delta x$

手順４：分割数nを多くするほど，近似の精度が上がるから，次の式が成り立つ。

[体　　積]　$V = \pi \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)\}^2\ \Delta x = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\ dx$

6.3　例題

例題　次の曲線または直線で囲まれた図形を，x軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) $\boxed{y=\dfrac{1}{x}\,,}$ x軸，$\boxed{x=1,\quad x=3}$

被積分関数　　積分範囲

［解答］　$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\ dx = \pi \int_1^3 \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 \dfrac{1}{x^2}\ dx$

$$= \pi \int_1^3 x^{-2} dx = \pi \Big[-x^{-1}\Big]_1^3 = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \pi\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{3}\pi$$

(2) $y=1-x$，x軸，y軸

［解答］y有：$y=1-x$，$y=0$

y無：$x=0$，$\boxed{(\text{連立})\ 1-x=0 \quad \therefore x=1}$　不足情報を補充

よって，求める体積は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\ dx = \pi \int_0^1 (1-x)^2 dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}(1-x)^3 \times \frac{1}{-1}\right]_0^1 = \pi\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1 = \pi\left(0+\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

問 10.21　次の曲線と直線で囲まれた図形を，x軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) $y=e^x$，x軸，$x=0$，$x=1$　　(2) $y=1-x^2$，x軸

(3) $y=\sin x$　($0 \leqq x \leqq \pi$)，x軸　　(4) $y=\sqrt{x+2}$，x軸，y軸

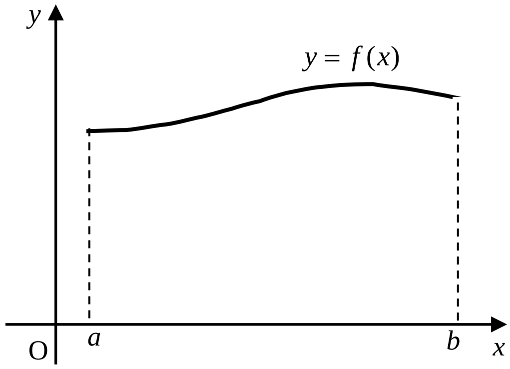
§7　長さ

7.1　長さ

長さに関する積分公式を導く。

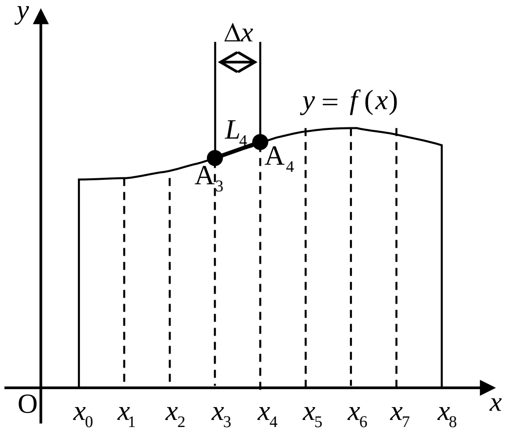
閉区間$a \leqq x \leqq b$における曲線$y = f(x)$の線長Lは，次で与えられる。

［長さ］　$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\ dx$



区分求積法と同じ手順を踏みます。

$n = 8$ の場合



手順１：閉区間$a \leqq x \leqq b$を，n等分に分割します。
n等分された分点を，次の様に設定します。
［分　　点］　$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
また，各小閉区間$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$の分割の幅を$\Delta x$とする。
［分割の幅］　$\Delta x = x_k - x_{k-1}$

手順２：各小閉区間の両端に対応する曲線上の点を
$\mathrm{A}_{k-1}(x_{k-1},\ f(x_{k-1}))$，　$\mathrm{A}_k(x_k,\ f(x_k))$とする。
このとき，線分$\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k$の長さを$L_k$とする。
よって，「①距離の公式」と「②平均値の定理」を
用いると，次の関係式が得られる。

【注意】
②平均値の定理
は次頁を参照のこと

$$L_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{\boxed{f(x_k) - f(x_{k-1})}\}^2}$$　：①距離の公式

②平均値の定理

$$= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{\boxed{f'(c_k)(x_k - x_{k-1})}\}^2}$$　（但し$x_{k-1} \leqq c \leqq x_k$）

$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + \{f'(c_k)\ \Delta x\}^2} = \Delta x\sqrt{1 + \{f'(c_k)\}^2}$$　（※［分割の幅］$\Delta x = x_k - x_{k-1}$を参照）

手順３：各線分 $A_{k-1}A_k$ の長さ L_k の総和は，曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ における線長の L の近似となる。

[近 似 式]　$L \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\ \Delta x$

手順４：分割数 n を多くするほど，近似の精度が上がるから，次の式が成り立つ。
このとき，$n \to +\infty$ ならば，$(x_{k-1}=)c_k = x_k$ が成り立つことに注意すると

[長　　さ]　$L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\ \Delta x = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ dx$

7.2　平均値の定理（復習）

平均値の定理とは？

詳細は，Ｑ２の微分_TEXT11 を参照してください。
内容は，「ロル(Rolle)の定理」から「コーシー(Cauchy)の定理」を証明し，
更に，「コーシー(Cauchy)の定理」の特別な形として「平均値の定理」を，
実用的な極限計算として「ロピタル(l'Hospital)の定理」を導いています。

次の性質を，**平均値の定理**と言います。[※微分_TEXT11 からの抜粋]

関数 $y=f(x)$ が，閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続で，開区間 $a<x<b$ で微分可能なとき，次を満たす c が少なくとも一つ存在する。

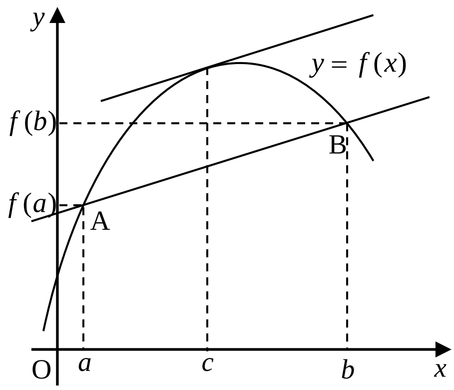
［平均値の定理］　$\boxed{f'(c)} = \boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$　（$a<c<b$）

（$x=c$ に対応する曲線 $y=f(x)$ 上の点における接線の傾き。）

（２点 $A(a,\ f(a))$，$B(b,\ f(b))$ を結ぶ直線 AB の傾き）

「平均値の定理」は，直線 AB と平行な接線があることを述べている。
前頁の証明の中では，次の形に変形したものが，使用されている。

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$



7.3　例題

例題　曲線 $y=2x^{\frac{3}{2}}$ （$0 \leqq x \leqq 1$）の長さ L を求めよ。

［解答］① $y' = f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$　　：微分

② $1+\{f'(x)\}^2 = 1+9x$　　：根号($\sqrt{\ }$)内の計算

③ $L = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1+9x}\ dx$　　：公式を適用

$$= \int_0^1 (1+9x)^{\frac{1}{2}}\ dx = \left[\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{27}\sqrt{(1+9x)^3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{27}\left(\sqrt{10^3}-1\right) = \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

問 10.22　曲線 $y=x^2$ （$0 \leqq x \leqq 1$）の長さ L を求めよ。

【注意】曲線の長さを求める場合は，次の２つが必要です。（$a>0$）

(1)　基本計算　$\int \sqrt{1+ax}\ dx = \int (1+ax)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{1}{a}\times\frac{2}{3}(1+ax)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3a}\sqrt{(1+ax)^3} + C$

(2)　［公式］　$\int \sqrt{1+(ax)^2}\ dx = \frac{1}{2a}\left[(ax)\sqrt{1+(ax)^2} + \log|ax+\sqrt{1+(ax)^2}|\right] + C$

(2)の証明は，次の通りです。

$F(x) = \frac{1}{2a}\left[ax\sqrt{1+a^2x^2} + \log|ax+\sqrt{1+a^2x^2}|\right]$　とおくと

$$F'(x) = \frac{1}{2a}\left[a\times\sqrt{1+a^2x^2} + ax\times\frac{\cancel{2}a^2x}{\cancel{2}\sqrt{1+a^2x^2}} + \frac{1}{ax+\sqrt{1+a^2x^2}}\times\left(a+\frac{\cancel{2}a^2x}{\cancel{2}\sqrt{1+a^2x^2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a(1+a^2x^2)+a^3x^2}{\sqrt{1+a^2x^2}} + \frac{1}{ax+\sqrt{1+a^2x^2}}\times\frac{a\sqrt{1+a^2x^2}+a^2x}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{a+2a^3x^2}{\sqrt{1+a^2x^2}} + \frac{a(ax+\sqrt{1+a^2x^2})}{(ax+\sqrt{1+a^2x^2})\sqrt{1+a^2x^2}}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{a+2a^3x^2}{\sqrt{1+a^2x^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\times\frac{2a+2a^3x^2}{\sqrt{1+a^2x^2}} = \frac{1+a^2x^2}{\sqrt{1+a^2x^2}} = \frac{(\sqrt{1+a^2x^2})^2}{\sqrt{1+a^2x^2}} = \sqrt{1+a^2x^2}\ (= f(x))$$