§５　不定積分の応用

5.1　積分公式の更新

既存の基本公式を１か所書き直します

前回までは　$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$

これを，次の様に書き直します。

［基本公式(修正)］　$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

（※修正内容は，絶対値をつける）

証明）絶対値の外し方は　$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ のとき} \\ -x, & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$

１）$x > 0$　のとき　$(\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

２）$x < 0$　のとき　$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

よって，x の正負にかかわらず

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

新しい基本公式を増設します。

新しい基本公式は，次の４つです。

［基本公式］

(1) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(2) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$

（但し，$a > 0$, $A \neq 0$）

証明）証明は，原子関数 $F(x)$ を微分して，
積分記号内の関数(被積分関数と言う） $f(x)$ に
なることを確認します。つまり，

$$F'(x) = f(x) \quad \left(\Leftrightarrow \quad \int f(x)\ dx = F(x) + C\right)$$

(1) $$\left\{\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right\}' = \frac{1}{2a}\left\{\log|x-a| - \log|x+a|\right\}'$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a} \times \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a} \times \frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$

(2) $$\left\{\frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}' = \frac{1}{a} \times \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2+x^2}$$

(3) $$\left\{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}' = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(4) $$\left\{\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right\}' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \times \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+A}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \times \frac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$$

例題　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\ dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\ dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\ dx$

［解法］(1) A と a の違いに注意。a は正の数ですが，（$A \neq 0$ はだから）
A は負の数もあり得ます。

(2) (1)との違いに気を付ける。

(3) 応用問題です。平方完成を適用します。

［解答］(1)　$A=-3$ の場合：　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\ dx=\log|x+\sqrt{x^2-3}|+C$

(2)　$a=\sqrt{3}$ の場合：　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\ dx=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

(3)　平方完成：　$x^2+4x+3=(x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+3}\ dx=\int\frac{1}{(x+2)^2-1}\ dx$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x+2)-1}{(x+2)+1}\right|+C=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

問 9.10　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-4}\ dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4}\ dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ dx$　(5) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\ dx$

＝＝

【研究：応用問題】

平方完成とは？

次の式を平方完成と言います。

［平方完成］　$x^2+\boxed{2p}\ x=(x+\boxed{p})^2\ \underline{\underline{-p^2}}$

①半分　②２乗を引く

応用問題の解法

平方完成後，次の３通りの結果が得られます。

１）$\displaystyle\int\frac{1}{(x+p)^2-a^2}\ dx=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{(x+p)-a}{(x+p)+a}\right|+C$　［本日の基本公式(1)］

２）$\displaystyle\int\frac{1}{(x+p)^2+a^2}\ dx=\frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+p}{a}\right)+C$　［本日の基本公式(2)］

３）［$a=0$ の場合は，今までの基本公式を適用する］

$$\int\frac{1}{(x+p)^2}\ dx=\int(x+p)^{-2}\ dx=-(x+p)^{-1}+C=\frac{-1}{x+p}+C$$

＝＝

5.2　置換積分法（応用）

置換積分の応用を紹介します。

○ $\sqrt{ax+b}$ を含む積分の置換積分法

[置換方法]　$u=\sqrt{ax+b}\cdots$①　とおく。

①の両辺を２乗する　$u^2=ax+b$　$\therefore\ x=\dfrac{u^2-b}{a}\cdots$②

②を微分する　$\dfrac{dx}{du}=\dfrac{2u}{a}$　$\therefore\ dx=\dfrac{2u}{a}du\cdots$③

①～③を「与式」に代入する。

【注意】前回までは①を直接，微分しました。

今回は①を x について解き（$x=$ の形にして），微分します。

また，$\dfrac{du}{dx}$ ではなく，$\dfrac{dx}{du}$ になっていることに注意する。

例題　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ を求めよ。

［解答］ $u=\sqrt{x-1}\cdots$①　とおくと　$u^2=x-1$　$\therefore\ x=u^2+1\cdots$②

②より　$\dfrac{dx}{du}=2u$　$\therefore\ dx=2u\ du\cdots$③

よって，①～③より

$$\left(\int\frac{1}{x\boxed{\sqrt{x+1}}}dx=\int\frac{1}{\boxed{x}\ \boxed{u}}dx=\int\frac{1}{\boxed{(u^2+1)}\ u}\boxed{dx}=\int\frac{1}{(u^2+1)u}\times\boxed{2u\ du}\right)$$

①　②　③

$$(\text{与式})=\int\frac{1}{(u^2+1)u}\times 2u\ du=2\int\frac{1}{u^2+1}du$$

$$=2\mathrm{Tan}^{-1}(u)+C=2\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{x-1})+C$$

問 9.11　不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ を求めよ。