演習　定積分_第 09 回

学年[2]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　]　氏名　[　　　　　　　　　　]

問 10. 20　次の曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2$，　$y=x+2$

y 有：$y=x^2$　　（$x=0$　のとき　$y=0$）

$y=x+2$　　（$x=0$　のとき　$y=2$）

y 無：(連立) $x^2=x+2$　$\Rightarrow$　$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$　　$\therefore x=-1,\ 2$

よって，求める面積は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{6+12-8}{3}-\frac{3-12+2}{6}=\frac{10}{3}-\frac{-7}{6}=\frac{20+7}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

(2)　$y=\sin x$，　$y=\cos x$　$\left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi\right)$

y 有：$y=\sin x$　　（$x=\frac{\pi}{2}$　のとき　$y=\sin\frac{\pi}{2}=1$）　　y 無：$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi$

$y=\cos x$　　（$x=\frac{\pi}{2}$　のとき　$y=\cos\frac{\pi}{2}=0$）

よって，求める面積は

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)\,dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$=\left(-\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$$

(3)　$y=\frac{1}{x^2+3}$，　$y=\frac{1}{4}$

y 有：$y=\frac{1}{4}$，　$y=\frac{1}{x^2+3}$　　（$x=0$　のとき　$y=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$）

y 無：(連立)　$\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{4}$　$\Rightarrow$　$4=x^2+3$　$\Rightarrow$　$x^2=1$　　$\therefore x=\pm1$

よって，求める面積は　　(※偶関数の公式)

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{4}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{4}\right)dx=2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}x\right]_{0}^{1}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{2}$$