演習　定積分_第 05 回

学年[2]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　]　氏名 [　　　　　　　　　　]

問 10.2　定積分 $\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ を計算せよ。[TEXT の Hint(指数法則)も参照]

$$\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)^2 dx=\int_1^2\left\{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2\left(x^{\frac{1}{2}}\times x^{-1}\right)+\left(x^{-1}\right)^2\right\} dx$$

$$=\int_1^2\left(x+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}\right) dx=\left[\frac{1}{2}x^2+4x^{\frac{1}{2}}-x^{-1}\right]_1^2=\left[\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$=\left(2+4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+4-1\right)=4\sqrt{2}-2$$

問 10.3　次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_{-2}^2(11x^7+7x^5+5x^3+3x^2+1)dx$

$$=2\int_0^2(3x^2+1)dx=2\left[x^3+x\right]_0^2=2(8+2)=20$$

(2) $\int_{-2}^2\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=0$　$\left[\text{奇関数：} f(-x)=\frac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2+4}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=-f(x)\right]$

(3) $\int_{-2}^2\frac{1}{x^2-9}dx=2\int_0^2\frac{1}{x^2-9}dx=2\left[\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right]_0^2$

$$=\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{5}-\log 1\right)=\frac{1}{3}\log 5^{-1}=-\frac{1}{3}\log 5$$

問 10.4　次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\int_0^1 x(-e^{-x})'\,dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx$

$$=-e^{-1}+\left[-e^{-x}\right]_0^1=-e^{-1}+(-e^{-1}+1)=1-2e^{-1}$$

(2) $\int_1^e \log x\,dx=\int_1^e (x)'\log x\,dx=\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx$

$$=e\log e-\log 1-\int_1^e dx=e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)=1$$