演習　不定積分２_第 02 回

学年[　２　]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　　]　氏名　[　　　　　　　　　　　　]

問 9.12　部分分数分解を用いて，前回の新しい基本公式(1)を証明せよ。

［新しい基本公式］　(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

１）部分分数分解　$\displaystyle\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x+a}$　とおき，p, q を求めよ。

$1 = p(x+a) + q(x-a)$

恒等式より　$x = a$ を代入　$1 = 2ap$　　$\therefore p = \dfrac{1}{2a}$

$x = -a$ を代入　$1 = -2aq$　　$\therefore q = \dfrac{-1}{2a}$

２）不定積分を求めよ。

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\log|x-a| - \log|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

問 9.13　不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx$ を求めよ。

１）部分分数分解　$\displaystyle\frac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} + \frac{r}{x+1}$　とおき，p, q, r を求めよ。

$x^2 + 1 = p(x+1) + qx(x+1) + rx^2$

恒等式より　$x = 0$ を代入　$1 = p$　　$\therefore p = 1$

$x = -1$ を代入　$2 = r$　　$\therefore r = 2$

$x = 1$ を代入

$2 = 2p + 2q + r \Rightarrow 2 = 2 + 2q + 2$　　$\therefore q = -1$

２）不定積分を求めよ。

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}\right)dx = \int\left(x^{-2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= -x^{-1} - \log|x| + 2\log|x+1| + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \log\frac{(x+1)^2}{|x|} + C$$