演習　定積分_第 10 回

学年[2]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　]　氏名　[　　　　　　　　　]

問 10. 21　次の曲線と直線で囲まれた図形を，x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) $y=e^x$，x 軸，$x=0$，$x=1$

y 無：$x=0,\ x=1$

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_0^1 \left(e^x\right)^2 dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\ dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^0\right)=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$$

(2) $y=1-x^2$，x 軸

y 無：(連立) $1-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx=\pi\int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4)\ dx=2\pi\int_0^1 (1-2x^2+x^4)\ dx$$

$$=2\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=2\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=2\pi\times\frac{15-10+3}{15}=\frac{16}{15}\pi$$

(3) $y=\sin x$ （$0\leqq x\leqq\pi$），x 軸

y 無：$0\leqq x\leqq\pi$

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\ dx=\pi\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ dx=\pi\times 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

(4) $y=\sqrt{x+2}$，x 軸，y 軸

y 無：$x=0$，(連立) $\sqrt{x+2}=0 \quad\Rightarrow\quad x+2=0 \quad \therefore x=-2$

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_{-2}^0 \left(\sqrt{x+2}\right)^2 dx=\pi\int_{-2}^0 (x+2)\ dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^0=\pi\{0-(2-4)\}=2\pi$$

問 10. 22　曲線 $y=x^2$ （$0\leqq x\leqq 1$）の長さ L を求めよ。

① $y'=f'(x)=2x$　　：微分

② $1+\{f'(x)\}^2=1+4x^2$　　：根号内の計算

③ $L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\ dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\ dx$　　：長さの公式を適用

$$=\frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+4x^2}+\log|2x+\sqrt{1+4x^2}|\right]_0^1=\frac{1}{4}\left\{2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})\right\}$$

[↑※TEXT 最終頁の積分公式を適用]