§６　補遺

6.1　補遺

補遺とは？

補遺とは，書き漏らした事柄などを、あとから補うことです。

6.2　一括変換

例題　線形変換 $f:\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 4x - 6y \end{cases}$ における，３点 $\mathrm{P}(-3,\ -1)$，$\mathrm{Q}(2,\ 1)$，$\mathrm{R}(3,\ 1)$ の像を求めよ。

［解説］個別計算

$$\mathrm{P}':\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix},\quad \mathrm{Q}':\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \mathrm{R}':\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

行列の利点は，**一括変換**できることです。

［解答］

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array}=\begin{pmatrix} -3+3 & 2-3 & 3-3 \\ -12+6 & 8-6 & 12-6 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{P}' & \mathrm{Q}' & \mathrm{R}' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -6 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array}$$

（答）$\mathrm{P}'(0,\ -6)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 2)$，$\mathrm{R}(0,\ 6)$

引続き，この一括変換に関する，次の問題を考えてみましょう

例題　線形変換 f による２点 $\mathrm{P}(-3,\ -1)$，$\mathrm{Q}(2,\ 1)$ の像が $\mathrm{P}'(4,\ 3)$，$\mathrm{Q}'(-1,\ 1)$ であるとき，f を表す行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を求めよ。

［解説］個別計算

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3a-b=4 \cdots ① \\ -3c-d=3 \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a+b=-1 \cdots ③ \\ 2c+d=1 \quad \cdots ④ \end{cases}$$

連立方程式①と③より $(a,\ b)$ を，②と④より $(c,\ d)$ を求める。

行列の利点は，一括計算できること。

［解答］ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

よって，右側から逆行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\times\frac{1}{-3+2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+1 & 8-3 \\ -3-1 & 6+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

【注意】行列は，積に関する交換法則が成り立ちません。

よって，左側又は右側のどちらかから掛けることが重要です。

１） $AX=B$［A が X の左にある］の場合

左側から逆行列を掛けると

$AX=B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)X=A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad EX=A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}B$

２） $XA=B$［A が X の右にある］の場合

右側から逆行列を掛けると

$XA=B \quad \Rightarrow \quad X(AA^{-1})=BA^{-1} \quad \Rightarrow \quad XE=BA^{-1} \quad \Rightarrow \quad X=BA^{-1}$

（※［逆行列］ $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ ／ ［単位行列］ $XE=EX=X$ ）

問 11.15 線形変換 f による２点 P(3, −4)， Q(4, 1) の像が P′(1, −2)， Q′(2, −1) であるとき， f を表す行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を求めよ。

6.3 正則

正則とは？

正則とは，行列 A が逆行列を持つことです。

［正則］ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ：正則 $\Leftrightarrow$ 逆行列 A^{-1} が存在する

$\Leftrightarrow \quad \Delta=ad-bc\neq 0$

※［逆行列］ $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ （但し $\Delta=ad-bc$）

行列 A が正則か正則でないか，つまり，逆行列を持つか持たないかによって，解答の仕方が異なります。

例題　次の線形変換による直線 $3x-y=2$ の像を求めよ。

(1) $\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=2x-3y \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x'=3x-y \\ y'=6x-2y \end{cases}$

［解説］(1)は正則で，(2)は正則でない場合です。（※行列_TEXT06 を参照）

［解答］(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3x'+2y' \\ -2x'+y' \end{pmatrix}$$

よって，原像に代入すると

$$3(-3x'+2y')-(-2x'+y')=2$$

$$-9x'+6y'+2x'-y'=2$$

$$-7x'+5y'=2$$

$$7x'-5y'=-2$$

（答）直線 $7x-5y=-2$

(2) $3x-y=2$　より　$y=3x-2$

よって　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3x-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-3x+2 \\ 6x-6x+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

（答）点 $(2,\ 4)$

例題　次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=8 \end{cases}$

［解説１］それぞれの係数行列は

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$　$\Rightarrow$　$\Delta=-3+4=1\neq 0$　∴正則［逆行列あり］

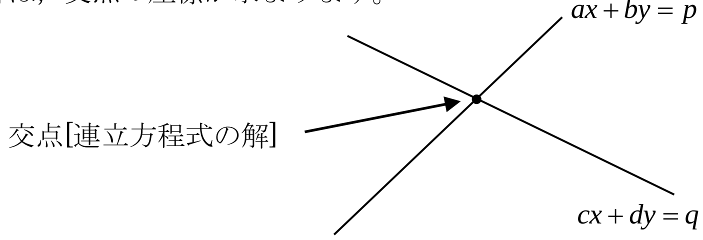
また，逆行列は　$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2)(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$　$\Rightarrow$　$\Delta=-4+4=0$　∴正則でない［逆行列なし］

［解説２］連立方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$　の図形的な意味は

２つの直線 $ax+by=p$ と $cx+dy=q$ の交点を求めることです。

①正則の場合は，交点の座標が求まります。

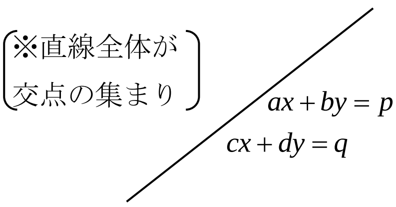


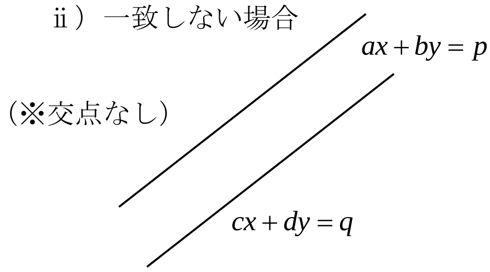
②正則でない場合は，２つの直線が平行な場合です。

特に，一致する場合は，直線全体が方程式の解となり

一致しない場合は，交点はないので，解はありません。

ｉ）一致する場合　　　　　　　　　　ⅱ）一致しない場合





連立方程式の解　　　　　　　　　　　　連立方程式の解

直線：$ax+by=p$　　　　　　　　　　　解なし

［解答］(1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}$

左側から，逆行列を掛けると

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+12\\ -6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases}x-2y=3\\ 2x-4y=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2y=3\\ x-2y=3\end{cases}$　（第２式を２で割る）

この２つの直線は一致するので，解は直線 $x-2y=3$ 全体

(3) $\begin{cases}x-2y=3\\ 2x-4y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2y=3\\ x-2y=4\end{cases}$　（第２式を２で割る）

この直線は(一致しない)平行な直線なので，解なし

[※(2)と(3)は行列計算を使用しません]

問 11.16　次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases}2x+4y=5\\ -x-2y=3\end{cases}$　　　(2) $\begin{cases}3x+4y=5\\ 6x+8y=10\end{cases}$

6.4　正則条件

正則条件とは？

行列 A が正則となる条件を，**正則条件**という。

例題　行列 $A=\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ の正則条件を求めよ。

［解説］ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ：正則 $\Leftrightarrow$ $\Delta = ad-bc \neq 0$

［解答］ $\Delta = -6a+12 \neq 0$　　$\therefore a \neq 2$

問 11.17　行列 $A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & x-5 \end{pmatrix}$ の正則条件を求めよ。

例題　連立方程式 $\begin{cases} ax-3y=0 \\ 4x-6y=0 \end{cases}$ が，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解を持つとき，

a の値と連立方程式の解を求めよ。

［解説］ $\begin{cases} ax-3y=0 \\ 4x-6y=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1）正則(逆行列をもつ)のとき

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　[※一般に $A\vec{o}=\vec{o}$ が成立]

よって，問題の内容に反する。

2）つまり，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解を持つということは，

「正則ではない(逆行列を持たない)」ことを意味します。

［解答］係数行列を $A=\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ とする。

問題より A は正則でないから　　$\Delta = -6a+12=0$

（※ A は正則でない $\Leftrightarrow$ $\Delta=0$）　　$\therefore a=2$

このとき $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 4x-6y=0 \end{cases}$ は同一直線 $2x-3y=0$ を表している。

よって，連立方程式の解は　直線 $2x-3y=0$ 全体

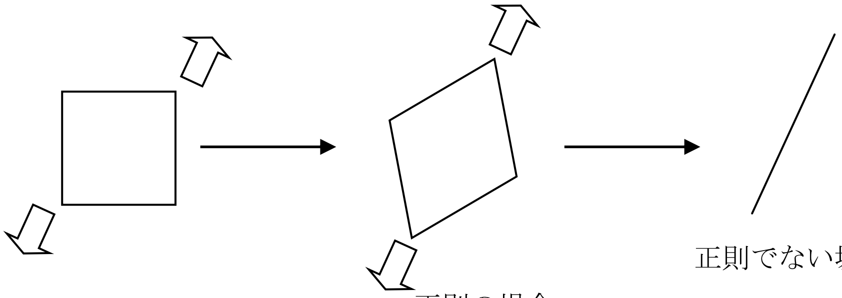
$\boxed{\text{課題}}$　連立方程式 $\begin{cases} (2-\lambda)x+y=0 \\ 7x+(3-\lambda)y=0 \end{cases}$ が，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解を持つとき，

λ の値と連立方程式の解を求めよ。

[※ギリシア(小)文字 λ の読み：ラムダ]

正則かどうかを調べる $\Delta = ad - bc$ について，もう少し説明を行います。

前回[TEXT06を参照]では，線形変換は，基本ベクトルで作られるマス目を引き延ばす内容で紹介しました。



本日は，面積的にはどのような変化が起きるのかを調べます。

例題　線形変換 $f:\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 4x - 6y \end{cases}$ における，３点 P$(-3,\ -1)$， Q$(2,\ 1)$， R$(3,\ 1)$ の像を P′， Q′， R′ とする。このとき，△P′Q′R′ の面積は△PQR の何倍になるかを求めよ。

［解説］１）空間図形_TEXT05の最終頁【研究】を参照

２つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のベクトルが作る

平行四辺形の面積は $S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ （絶対値）

２）基本ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が作る正方形の面積 $S = 1$

３）線形変換 $f \left(\leftrightarrow\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$ の基本ベクトルの像は

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

４）よって，移動後の基本ベクトル $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$， $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が作る

平行四辺形の面積は $S' = |ad - bc| = |\Delta|$ （絶対値）

５）従って，マス目の面積は $|\Delta|$ 倍に拡張される。つまり，

移動後の図形の面積は，移動前の図形の面積の $|\Delta|$ 倍となる。

［解答］ $f:\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 4x - 6y \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ より

$|\Delta| = |-6+12| = 6$ （答） 6倍

【確認】本日の最初の例題を参照

移動前の三角形の頂点

$\mathrm{P}(-3,\ -1)$， $\mathrm{Q}(2,\ 1)$， $\mathrm{R}(3,\ 1)$

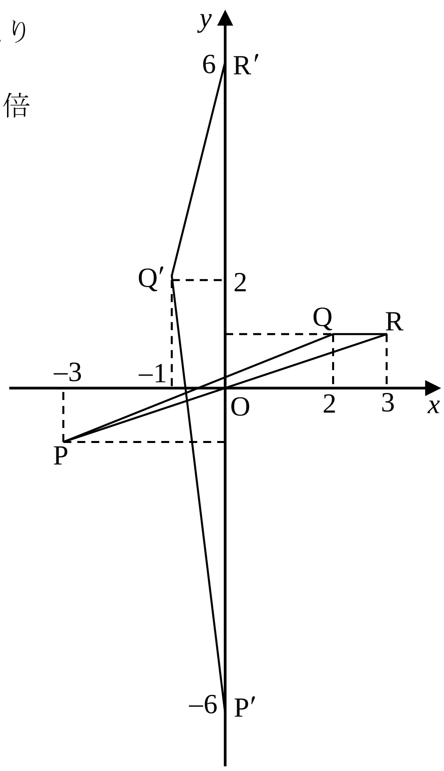
移動後の三角形の頂点

$\mathrm{P}'(0,\ -6)$， $\mathrm{Q}'(-1,\ 2)$， $\mathrm{R}'(0,\ 6)$

よって，右図より

$S = \Delta\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$S' = \Delta\mathrm{P'Q'R'} = \dfrac{1}{2} \times 12 \times 1 = 6$



問 11.18 曲線 $x^2 + y^2 = 4$ で囲まれる部分を図形 C とする。

このとき，線形変換 $f:\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ による図形 C の像 C' の面積を求めよ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$\boxed{10}$の解答 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ とすると

$\Delta = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$

問題より，行列 A は正則でないから $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ 4$

ⅰ） $\lambda = 1$ のとき $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0$

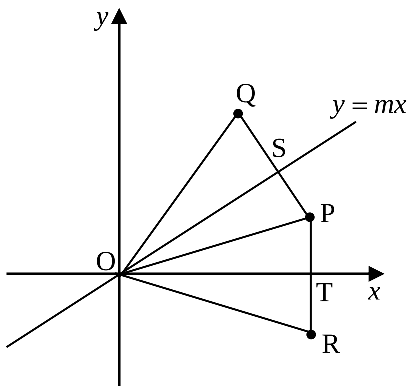
ⅱ） $\lambda = 4$ のとき $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 0$

（※この課題内容は，数学Ⅲの固有値，固有ベクトルでもう一度学習します）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＝＝

【研究】直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す行列



準備１）□点 P を直線 $y = mx$ に関して
対称移動した点を Q とする。
□点 P を x 軸に関して
対称移動した点を R とする。
□線分 PQ と直線 $y = mx$ との
交点を S とする。
□線分 PR と x 軸との交点を T とする。

準備２）$\angle \mathrm{SOT} = \theta / 2$ とすると，$\angle \mathrm{QOR} = \theta$

証明）対称性より　$\angle \mathrm{QOS} = \angle \mathrm{POS}$，$\angle \mathrm{POT} = \angle \mathrm{ROT}$

よって

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{QOR} &= \angle \mathrm{QOS} + \angle \mathrm{POS} + \angle \mathrm{POT} + \angle \mathrm{ROT}\\ &= \angle \mathrm{POS} + \angle \mathrm{POS} + \angle \mathrm{POT} + \angle \mathrm{POT}\\ &= 2(\angle \mathrm{POS} + \angle \mathrm{POT}) = 2 \times \angle \mathrm{SOT} = 2 \times \theta / 2 = \theta\end{aligned}$$

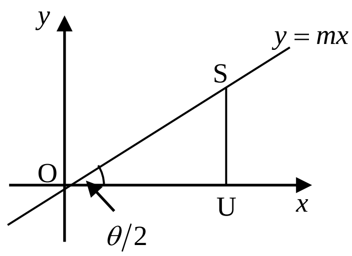
準備３）『直線 $y = mx$ に関する対称移動[P→Q]』は
『x 軸対称[P→R]』と『原点回りの θ 回転[R→Q]』の合成関数である。
（※ OP = OQ = OR であることに注意する）

つまり，次の様に行列表現できます。

[回転変換]∘[x 軸対称]　　[$y = mx$ 対称]

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

準備４）直線の傾き m と $\angle \mathrm{SOT} = \theta / 2$ の関係を考える



□点 S から x 軸に降ろした垂線の足を U とする。
□直線 $y = mx$ 上の点 S の座標を $(a,\ ma)$ とする。
このとき，直角三角形 OSU において

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{SU}}{\mathrm{OU}} = \frac{ma}{a} = m$$

準備５）$m = \tan\dfrac{\theta}{2}$ のとき　$\sin\theta = \dfrac{2m}{1+m^2}$，$\cos\theta = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$　が成り立つ。

（※不定積分２_TEXT03 の３頁～４頁を参照）

以上のことより，次の結論(公式)が導けます。

［直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す行列］　$\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$

＝＝