§５　図形の変換

5.1　線形変換の図形的な意味

線形変換の図形的な意味を考えます。
長話になります。頑張って読んでください。

○まずは，記号表記に関する注意から。

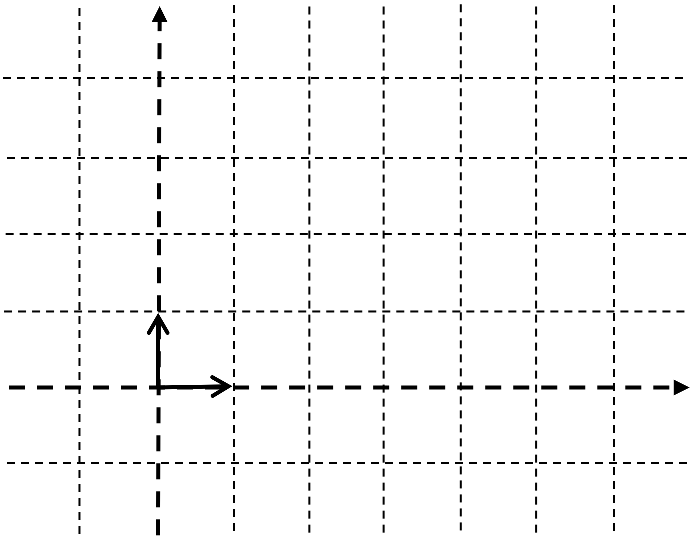
点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ の座標は，位置ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ に読み替えることが可能です。

よって，次の表記は，順に①線形変換，②行列，③ベクトルを用いた表記ですがすべて同じことを表しています

［記号表記］　$\mathrm{P}' = f(\mathrm{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}\,' = A\vec{p}$

○ $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を**基本ベクトル**といいます。

基本ベクトルによって作成される，次の様なマス目[破線]を考えます。

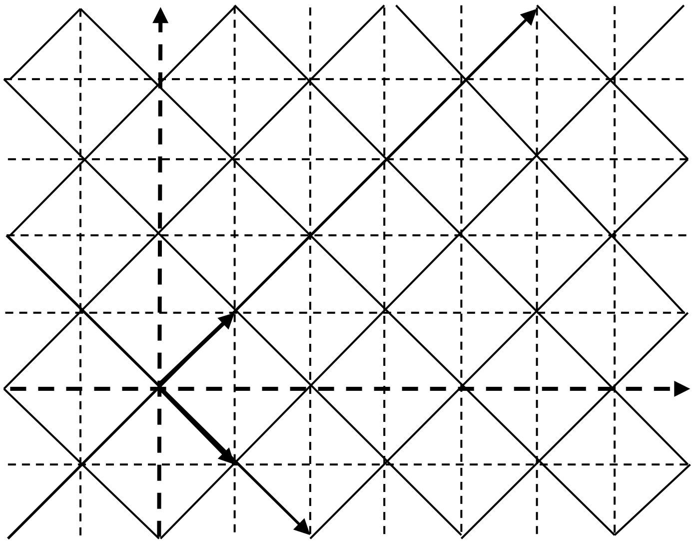


○今回は線変換 f を表す行列を $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とします。

○このとき，基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ は，次の様なベクトルに移ります

$$\vec{e}_1\,' = A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{e}_2\,' = A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

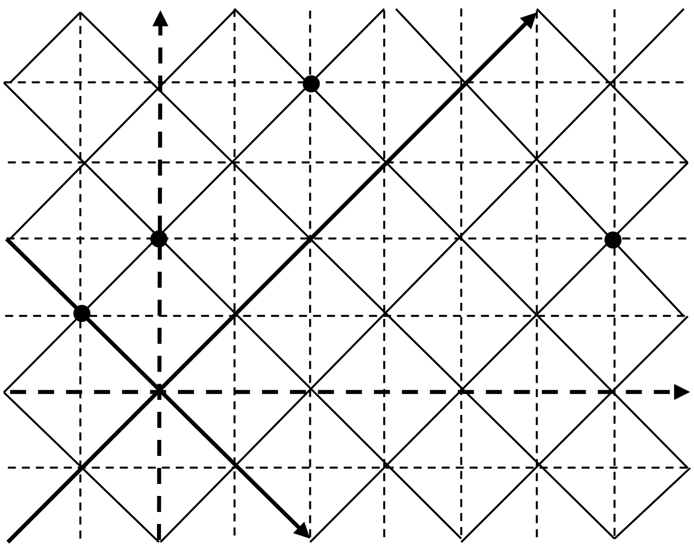
〇 $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$， $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって作成されるマス目[実線]を書き込みます。



〇次に２点 P(−1, 1)， Q(2, 4) とそれぞれの像 P′, Q′ を記入します。

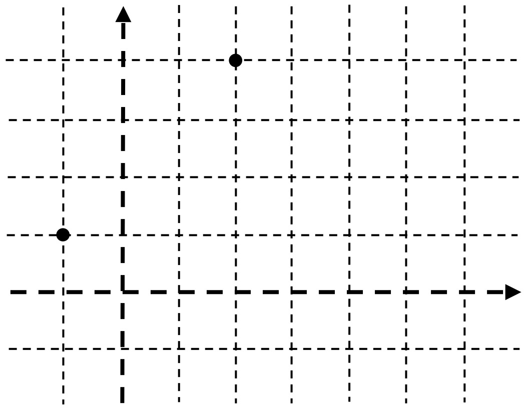
$$P' : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

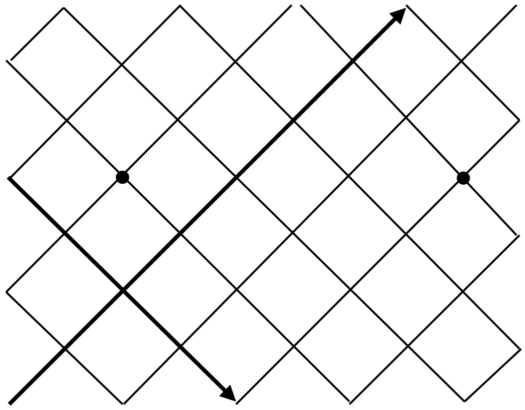
$$Q' : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$



何かに気付きますか？

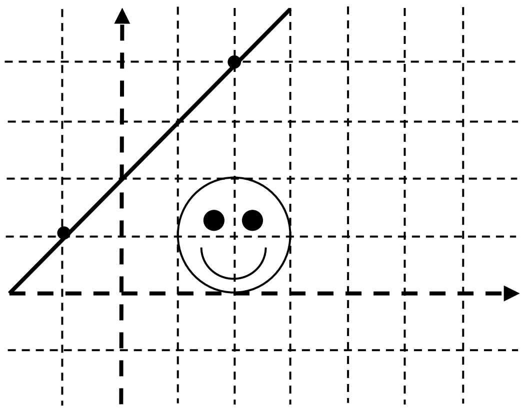
○２点P，Qを$\vec{e}_1$と$\vec{e}_2$が作るマス目[破線]だけの図に，
２点P′，Q′を$\vec{e}'_1$と$\vec{e}'_2$が作るマス目[実線]だけの図に分離します。

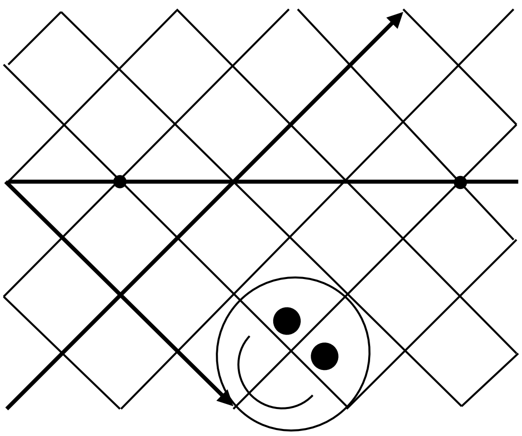




○点Pも点P′も，マス目的には座標$(-1,\ 1)$に位置します。
［数学的表記］　$\vec{p} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}' = \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2$
○点Qも点Q′も，マス目的には座標$(2,\ 4)$に位置します。
［数学的表記］　$\vec{q} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{q}' = 2\vec{e}'_1 + 4\vec{e}'_2$

○つまり，線形変換の図形的な意味は
基本ベクトル$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$の像$\vec{e}'_1$，$\vec{e}'_2$で作られる新しい座標系(マス目)に
そのまま移される変換となります。
○従って，２点P，Qを結ぶ直線]は，２点P′，Q′を結ぶ直線へ移されます。
○つまり，「にこにこマーク」は次の様に変換されます。





例題　２点 $P(-1,\ 1)$，$Q(2,\ 4)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ。

(2) 線形変換 f を表す行列を $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とする。

このとき，２点 P，Q の像 P′，Q′ の座標を求めよ。

(3) 直線 PQ の像である直線 P′Q′ の方程式を求めよ。

［解答］(1) 傾き：$m=\dfrac{4-1}{2-(-1)}=\dfrac{3}{3}=1$

点 P を通る傾き $m=1$ の直線：$y-1=1\times(x+1)$

$\therefore\ y=x+2$

(2) P′：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1\\ 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$　　$P'(0,\ 2)$

Q′：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4\\ -2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 2\end{pmatrix}$　　$Q'(6,\ 2)$

(3) P′，Q′ の y 座標が同じ値なので，

直線 P′Q′ の方程式は　$y=2$

○実際は，逆行列を用いて，次の様に解くことができます。

直線 PQ の方程式：$y=x+2\cdots$①[移動前なので $(x,\ y)$ を用いる]

変換の行列表記：$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$　より

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{1+1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x'-y'\\ x'+y'\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x=\frac{x'-y'}{2},\ \ y=\frac{x'+y'}{2}\cdots②$$

よって，②を①に代入すると

$$\left(\frac{x'+y'}{2}\right)=\left(\frac{x'-y'}{2}\right)+2$$

[$(x',\ y')$ の表記に変わったので，移動後の図形を表す]

$x'+y'=x'-y'+4$

$2y'=4$

$\therefore\ y'=2$　　　　（答）$y=2$

※解答中は移動前 $(x,\ y)$ と移動後 $(x',\ y')$ を区別するために
“ダッシュ”を付けますが，最後の答えは“ダッシュ”を外します

例題　次の像の方程式を求めよ。

(1)　x 軸対称な変換による直線 $y=2x+1$ の像

(2) 原点まわり 45° 回転による双曲線 $x^2-y^2=2$ の像

［解答］(1) 問題より　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

よって　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{-1-0}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ -y' \end{pmatrix}\cdots$①

①を原像$[y=2x+1]$に代入すると

$-y'=2x'+1$

$\therefore\ y'=-2x'-1$　　　　（答）$y=-2x-1$

(2) 問題より　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}x'+\sqrt{2}y' \\ -\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y' \end{pmatrix}\cdots①$$

①を原像$[x^2-y^2=2]$に代入すると

$$\frac{(\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y')^2}{4}-\frac{(-\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y')^2}{4}=2$$

$$(\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y')^2-(-\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y')^2=8$$

$$(2x'^2+4x'y'+2y'^2)-(2x'^2-4x'y'+2y'^2)=8$$

$$8x'y'=8$$

$x'y'=1$　　　　（答）$xy=1$

問 11. 13　次の像の方程式を求めよ。

(1) 線形変換 $f:\begin{cases} x'=4x+3y \\ y'=2x+y \end{cases}$ による直線 $2x+5y-4=0$ の像を求めよ。

(2) 原点まわり 60° 回転による２次曲線 $x^2+\sqrt{3}xy+2y^2=1$ の像

5.2　正則でない線形変換の像

復習から。正則とは？

○逆行列をもつ行列を**正則**といいます。

［正則］　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ：正則　$\Leftrightarrow$　$\Delta = ad-bc \neq 0$

このとき

［逆行列］　$A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　（但し　$\Delta = ad-bc$）

○ここでは，正則でない$[\Delta=0]$ときの線形変換の像を考えます。
　よって，逆行列がないので，前頁の解法は使用できません。

例題　線形変換 $f:\begin{cases} x' = x+y \\ y' = 2x+2y \end{cases}$ による次の直線の像を求めよ。

(1)　$3x-y=-4$　　　　(2)　$x+y=1$

［解説］０）正則でないので　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　$\Rightarrow$　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$　は不可

１）原像を y について解き，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \boxed{y} \end{pmatrix}$　に代入して計算する。

２）得られた結果から，x を消去して，$(x',\ y')$ の式にする。
つまり，移動後の図形の方程式が得られる。

［解答］(1)　$3x-y=-4$　より　$y=3x+4$

よって　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3x+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+3x+4 \\ 2x+6x+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x+4 \\ 8x+8 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x' = 4x+4 \cdots$①，$y' = 8x+8 \cdots$②

①×２－②より　　$2x'-y'=0$

（答）直線　$2x-y=0$（又は　$y=2x$）

(2)　$x+y=1$　より　$y=-x+1$

よって　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-x+1 \\ 2x-2x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x'=1,\ y'=2$

[※ x が無いので，この結果が移動後の図形になります]

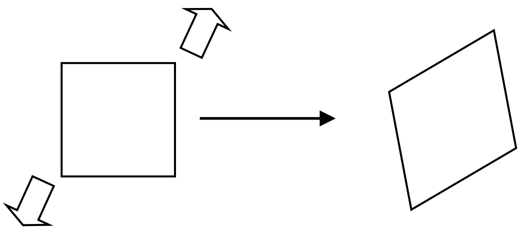
（答）点 $(1,\ 2)$

問 11. 14　線形変換 $f:\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = 3x - 6y \end{cases}$ による直線 $x + y = 1$ の像を求めよ。

＝＝＝

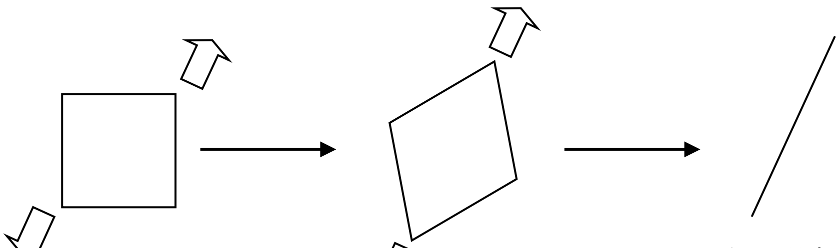
【研究：図形的な意味】

正則な場合は，最初に説明したように，マス目を引き延ばした形になります。



正則な場合

この状態を更に，線上になるまで引き伸ばしたものが、正則でない場合です

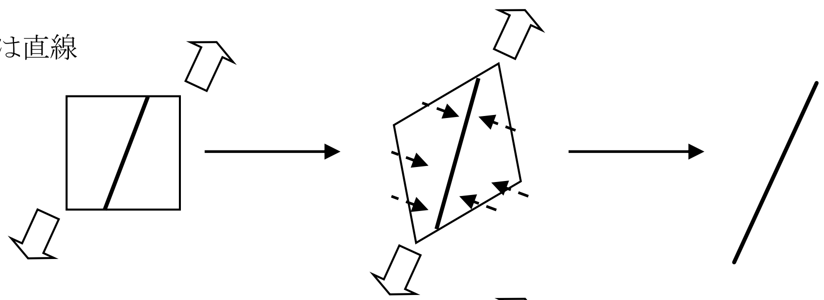


正則でない場合

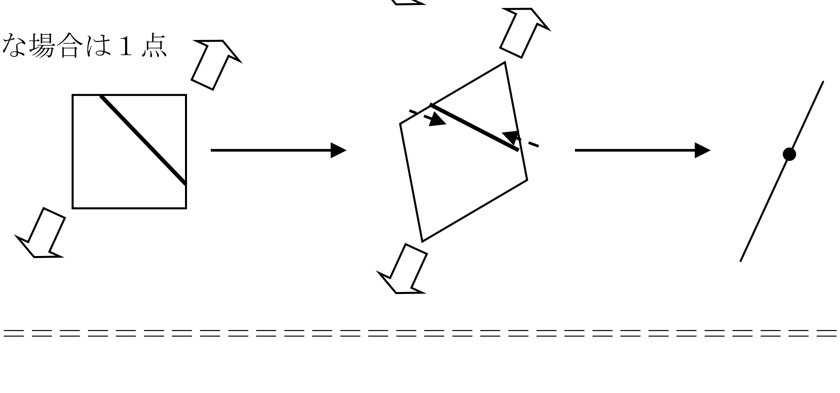
よって，平面の上の直線は，

伸ばされた最終状態の直線に移されるか，１点に移されます。

通常は直線



特殊な場合は１点



＝＝＝