4.2　恒等変換

恒等変換とは？

○前回の復習から

［線形変換とそれを表す行列］

$$f:\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

［対称変換］

x 軸　$f:\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

y 軸　$f:\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

原点　$f:\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$y=x$　$f:\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

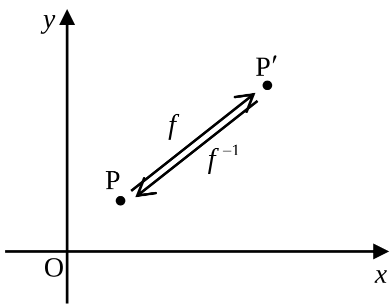
○点 P を，元の点 P に移す変換を，**恒等変換**といいます。

［恒等変換］　$f:\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（単位行列）

4.3　逆変換

逆変換とは？

○点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移す
変換 f に対して，
点 P' を点 P に引き戻す変換を，
逆変換といい，
記号で f^{-1} と表す。



○特に，線形変換 $f:\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ においては

［逆変換］　$f^{-1} \leftrightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　（但し　$\Delta=ad-bc$）

説明）線形変換 $f:\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$ を行列表記すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

像とは，原像とは？

○変換 f で移された点 $\mathrm{P}'\ [=f(\mathrm{P})]$ を，点 P の**像**という。

○また，移される前の点 P を，点 P' の**原像**という。

例題　線形変換 $f:\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=4x+3y \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 線形変換 f を表す行列 A を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(3,\ -1)$ の像 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ の座標を求めよ。

(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めよ。

(4) 点 $\mathrm{Q}'(1,\ 5)$ の原像 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を求めよ。

［解答］ (1) $f \leftrightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\mathrm{P}'=f(\mathrm{P}) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-1 \\ 12-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

（答） $\mathrm{P}'(5,\ 9)$

(3) $f^{-1} \leftrightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\mathrm{Q}'=f(\mathrm{Q}) \ \Rightarrow \ \mathrm{Q}=f^{-1}(\mathrm{Q}')$

$$\leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-5 \\ -4+10 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（答） $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$

問 11.9　線形変換 $f:\begin{cases} x'=3x-2y \\ y'=5x-3y \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 線形変換 f を表す行列 A を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(5,\ 2)$ の像 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ の座標を求めよ。

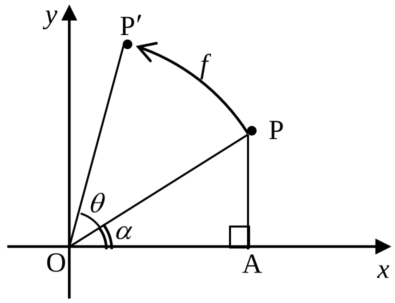
(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めよ。

(4) 点 $\mathrm{Q}'(3,\ 2)$ の原像 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を求めよ。

4.4　回転による変換

回転による変換とは？

〇原点を中心とする回転(＝原点まわりの回転)によって
　移される変換 f を考えます。



〇点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の変換 f による像を
　$\mathrm{P}'(x',\ y')$ とする。
　原点まわりの回転角を θ とする。

〇点 P から x 軸に降ろした垂線の足を A とする。
　$\mathrm{OP}=r$ とすると，三角比の定義より

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \qquad \therefore\ y=r\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r} \qquad \therefore\ x=r\cos\alpha$$

　よって，点 P の座標は　$\mathrm{P}(x,\ y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

〇同様に考えると，点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ の座標は，次の様に書き直される。

$$\mathrm{P}'(x',\ y')=(r\cos(\alpha+\theta),\ r\sin(\alpha+\theta))$$

〇加法定理を用いると

$$\begin{aligned}
x'=r\cos(\alpha+\theta)&=r(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\\
&=\boxed{r\cos\alpha}\cos\theta-\boxed{r\sin\alpha}\sin\theta\\
&=x\cos\theta-y\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'=r\sin(\alpha+\theta)&=r(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)\\
&=\boxed{r\sin\alpha}\cos\theta+\boxed{r\cos\alpha}\sin\theta\\
&=y\cos\theta+x\sin\theta
\end{aligned}$$

　この結果は，「原点まわりの回転 θ による変換」が
　　　　　　　　　　　　「線形変換」であることを導きます。

［回転による変換］

$$f:\begin{cases} x'=\cos\theta\times x-\sin\theta\times y \\ y'=\sin\theta\times x+\cos\theta\times y \end{cases} \quad\leftrightarrow\quad A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

【注意】回転による変換 f の逆変換

$$\boxed{f^{-1} \quad \leftrightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}$$

これは，次の様に２通りの導き方があります。

① $\Delta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

②［重要］θ 回転(左回り)の逆変換は，$(-\theta)$ 回転(右回り)より

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

※参考：奇関数[原点対称]と偶関数[y 軸対称]

(1) 奇関数⇔ $f(-x)=-f(x)$ 　つまり　$\sin(-x)=-\sin x$

(2) 偶関数⇔ $f(-x)=+f(x)$ 　つまり　$\cos(-x)=\cos x$

例題　原点のまわりに 30° 回転する線形変換を f とする。

(1) 線形変換 f を表す行列 A を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ の像 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ の座標を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}'(\sqrt{3},\ 1)$ の原像 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を求めよ。

［解答］(1) $f \leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}-\sqrt{3}\\ -1+3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 　より

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos30^\circ & \sin30^\circ\\ -\sin30^\circ & \cos30^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3+1\\ -\sqrt{3}+\sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

問 11.10 原点のまわりに 45° 回転する線形変換を f とする。

(1) 線形変換 f を表す行列 A を求めよ。

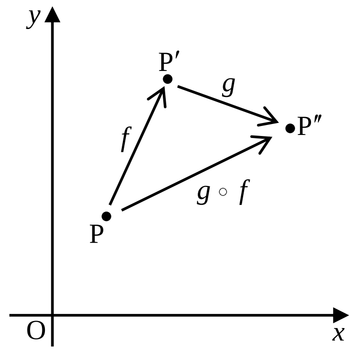
(2) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$ の像 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ の座標を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}'(-1,\ 3)$ の原像 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を求めよ。

4.5 合成変換

合成変換とは？

○点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移す線形変換を f とし，
点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ を点 $\mathrm{P}''(x'',\ y'')$ に移す線形変換を g とする。



○このとき，次の関係式が成り立つ。

$\mathrm{P}' = f(\mathrm{P})\cdots$①, $\qquad \mathrm{P}'' = g(\mathrm{P}')\cdots$②

よって，①を②に代入すると，次式が成り立つ。

$$\mathrm{P}'' = g(f(\mathrm{P})) \ \underline{\underline{= (g\circ f)(\mathrm{P})}}$$

（※新しい記号：∘はマルと読む）

○このように，２つの線形変換 f，g を一つにまとめた
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を点 $\mathrm{P}''(x'',\ y'')$ に移す線形変換 $g\circ f$ を，**合成変換**といいます。

> 線形変換 f を表す行列を A とし，
> 線形変換 g を表す行列を B とする。
> このとき，合成変換 $g\circ f$ を表す行列は BA である。
> ［合成変換］ $f \leftrightarrow A$，$g \leftrightarrow B \quad \Rightarrow \quad g\circ f \leftrightarrow BA$

証明） $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とすると，

$$\mathrm{P}' = f(\mathrm{P}) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdots①$$

$$\mathrm{P}'' = g(\mathrm{P}') \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\cdots②$$

よって，①を②に代入すると

$$\mathrm{P}'' = g(f(\mathrm{P})) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

従って $\qquad g\circ f \quad \leftrightarrow \quad BA \qquad$ が導ける。

【注意】１）行列は，通常，交換法則が成り立たないので

合成変換 $g \circ f$ と $f \circ g$ は異なる線形変換です。

$[\, g \circ f \neq f \circ g \quad \leftrightarrow \quad BA \neq AB \,]$

２）合成変換は，変換の順番が重要です。

合成変換 $g \circ f$ の場合は，

まず線形変換 f を行い，次に線形変換 g を行います。

[※つまり，後ろから順番に変換されます]

尚，合成変換を表す行列を求める際は，

そのまま対応する行列に置換えるだけなので楽ですね。

$\left(\; g \circ f \quad \leftrightarrow \quad B\ A \;\right)$ [※変換順序は後から]

３）同じ線形変換の合成変換 $f \circ f\ (= f^2)$ が表す行列は A^2 です。

$[\, f \circ f\ (= f^2) \quad \leftrightarrow \quad A^2 \,]$

例題　原点の回りの 30° 回転を f とし，原点の回りの 60° 回転を g とする。

このとき，合成変換 $g \circ f$ を表す行列を求めよ。

［解答］ $f \quad \leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$g \quad \leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

よって　$g \circ f \quad \leftrightarrow \quad BA = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - \sqrt{3} & -1 - 3 \\ 3 + 1 & -\sqrt{3} + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 11. 11　線形変換 f を表す行列を $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ とし，

線形変換 g を表す行列を $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ とするとき，

合成変換 $f\circ g$ と $g\circ f$ を求めよ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【研究：前頁例題の再考】

原点の回りの 30° 回転を f とし，原点の回りの 60° 回転を g とする。

このとき，合成変換 $g\circ f$ は，原点回りの $90^\circ(=30^\circ+60^\circ)$ 回転となります。

よって，合成変換 $g\circ f$ を表す行列は

$$g\circ f \quad \leftrightarrow \quad BA=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

それでは，次の問も考えてみて下さい。

問 11. 12　原点のまわりに 30° 回転する線形変換を f とする。

このとき，合成変換 f^4 を表す行列を求めよ。

[Hint：原点回りに 30° 回転を 4 回行うと，最終的には原点回りに何度回転？]

[補足]この考え方を利用すると，加法定理の証明もできます。

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

よって　$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝