# §３　連立１次方程式

## 3.1　逆行列

逆行列とは？

○正方行列 $A$ に対して

$$AB = BA = E$$

を満たす，行列 $B$ を行列 $A$ の**逆行列**といい，

記号 $A^{-1}$ (読み：エイ　インバース)と表す。

［逆行列］　$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

○２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は，次の通りである。

[※ギリシア文字(小文字)Δ ：デルタ]

［２次正方行列の逆行列］

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad （但し　\Delta = ad - bc）$$

説明） $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく。

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

よって， $AB = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases} ax+bz=1 \cdots ① \\ cx+dz=0 \cdots ② \end{cases} \qquad \begin{cases} ay+bw=0 \cdots ③ \\ cy+dw=1 \cdots ④ \end{cases}$$

①× $d$ 　$adx + bdz = d$

②× $b$ 　$bcx + bdz = 0$ （－

$(ad - bc)x = d$

③× $d$ 　$ady + bdw = 0$

④× $b$ 　$bcy + bdw = b$ （－

$(ad - bc)y = -b$

②× $a$ 　$acx + adz = 0$

①× $c$ 　$acx + bcz = c$ （－

$(ad - bc)z = -c$

④× $a$ 　$acy + adw = a$

③× $c$ 　$acy + bcw = 0$ （－

$(ad - bc)w = a$

従って，

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

このとき

$$BA=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

も成り立つので，$B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ は，行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ である。

【注意】

1）逆行列 $A^{-1}$ は，全ての行列 $A$ に対して，存在するわけではない。

2）逆行列 $A^{-1}$ が存在する行列 $A$ を，**正則行列**という。

［正則行列］　$A$ ：正則行列　⇔　逆行列 $A^{-1}$ が存在

3）特に，２次の場合

逆行列 $A^{-1}$ の分母に当たる $\Delta=ad-bc$ が 0 でなければ，

逆行列は常に存在するので，次の命題が成り立つ。

［２次正方行列の正則行列］

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ：正則行列　⇔　$\Delta=ad-bc\neq 0$

更に，逆行列は　$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

## 3.2　連立１次方程式

連立１次方程式への応用を紹介します。

○連立１次方程式　$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$　は，

行列を用いて，次の様に表すことができます。

［行列表記］　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

（※実際　$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$　より確認可能）

【注意】

1）行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を，連立 1 次方程式 $\begin{cases} \boxed{a}x+\boxed{b}y=p \\ \boxed{c}x+\boxed{d}y=q \end{cases}$ の

**係数行列**という。

2）更に，ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\vec{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと，

次の 3 つの表記は，同じ内容となる。

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{p}$$

○それでは，連立 1 次方程式 $A\vec{x}=\vec{p}$ の解法を説明します。

0）通常，行列においては，交換法則は成立しません。

よって，掛ける順序、つまり，

「左側から掛けるのか」又は「右側から掛けるのか」

は大変重要なことになります。

1）今回は，左側から逆行列 $A^{-1}$ を掛けます。

$A\vec{x}=\vec{p} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{p}$

2）逆行列の定義(性質)から　$AA^{-1}=A^{-1}A=E$　が成り立つので

$A\vec{x}=\vec{p} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{p} \quad \Rightarrow \quad E\vec{x}=A^{-1}\vec{p}$

3）単位行列 $E$ は，数字の 1 に相当するから

$A\vec{x}=\vec{p} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{p} \quad \Rightarrow \quad E\vec{x}=A^{-1}\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}=A^{-1}\vec{p}$

（※実際　$E\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{x}$　より確認可能）

$\boxed{\text{補足}}$　この計算のイメージは，実は 1 次方程式の解法と同じになります。

$ax=p$　のとき両辺を $a$ で割ると　$x=\dfrac{p}{a}\cdots$①

このとき，$a$ の逆数は　$\dfrac{1}{a}=a^{-1}$　と表記できるので

①より　$ax=p \quad \Rightarrow \quad x=a^{-1}p$　[左側から逆数 $a^{-1}$ を掛ける]

例題　連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$ を解け。

［解答］行列表記より　$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

よって　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

[※左側から逆行列を掛ける“＝行列で割ったイメージ”]

$$= \frac{1}{8-(-3)}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -20+3 \\ 15+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -17 \\ 21 \end{pmatrix}$$

[※覚え方：①Δ 分の 1　②$a$ と $d$ の位置交換　③$b$ と $c$ の符号変換]

（答）　$x = -\dfrac{17}{11},\ y = \dfrac{21}{11}$

**問 11.7**　次の連立 1 次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【復習：行列式とクラメルの公式】

○$\Delta = ad - bc$　は，実は，行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc(=\Delta)$　のことです。

○連立 1 次方程式を，一般的に解いてみましょう。

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} pd - bq \\ aq - pc \end{pmatrix}$$

（答）　$x = \dfrac{pd - bq}{\Delta} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}$

$y = \dfrac{aq - pc}{\Delta} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$　$\left( 但し\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \right)$

○これは，クラメルの公式の証明となります。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

# §４　線形変換

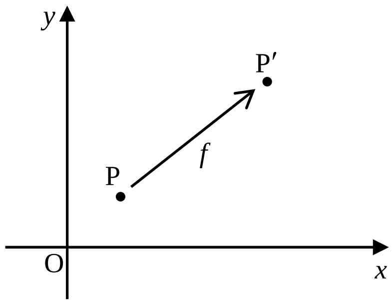
## 4.1　線形変換

線形変換とは？

○点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移す規則を**変換** $f$ という。

記号で，次の様に表す。

［変換］　$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$




○変換 $f$ が次で表される規則のときを，

**線形変換**という。

［線形変換］　$f : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

○線形変換は，行列を用いて表すことができます。

［行列表記］　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

○このとき，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を，**線形変換** $f$ **を表す行列**といい，

記号で次の様に表す。

［線形変換を表す行列］　$f \leftrightarrow A$

例題　$x$ 軸対称な線形変換を $f$ とする。このとき $f$ を表す行列 $A$ を求めよ。

［注意］本 TEXT では，移動前を[ダッシュ無]とし，

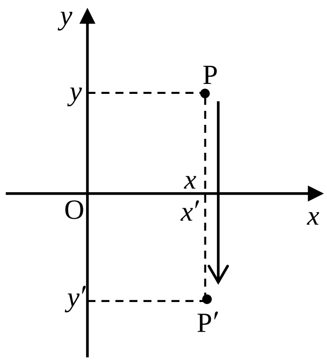
移動後を[ダッシュ有]として区別する。

［解答］右図より

$$f : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f : \begin{cases} x' = 1 \times x + 0 \times y \\ y' = 0 \times x + (-1) \times y \end{cases}$$

よって，線形変換を表す行列は

$$f \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



**問 11.8**　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を直線 $y=x$ に関して対称に移した点を $\mathrm{P}'(x',\ y')$ とする。

また，点 P から $x$ 軸に降ろした垂線の足を A，点 P′ から $y$ 軸に降ろした垂線の足を A′ とする。

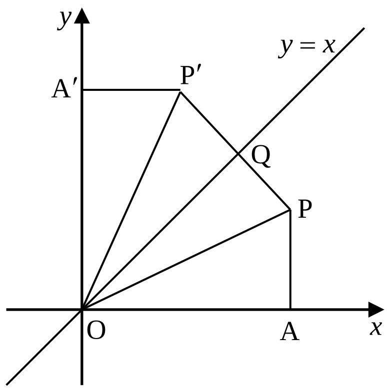
このとき，次の問いに答えよ。

尚，直線 $y=x$ と線分 PP′ の交点を Q とする。

(1)　$\Delta\mathrm{OAP}\equiv\Delta\mathrm{OA'P'}$　を証明せよ。

(2)　$x',\ y'$ を，$x,\ y$ を用いて表せ。

(3)　直線 $y=x$ に関して対称に移す線形変換 $f$ を表す行列 $A$ を求めよ。




※演習と課題が終わったあとで，確認してください。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【研究：対称な移動(線形変換)】

(1)　$x$ 軸対称　$f:\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}\Rightarrow f:\begin{cases}x'=1\times x+0\times y\\ y'=0\times x+(-1)\times y\end{cases}\leftrightarrow A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(2)　$y$ 軸対称　$f:\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow f:\begin{cases}x'=(-1)\times x+0\times y\\ y'=0\times x+1\times y\end{cases}\leftrightarrow A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(3)　原点対称　$f:\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}\Rightarrow f:\begin{cases}x'=(-1)\times x+0\times y\\ y'=0\times x+(-1)\times y\end{cases}\leftrightarrow A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(4)　直線 $y=x$ に関して対称

$$f:\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases}\Rightarrow f:\begin{cases}x'=0\times x+1\times y\\ y'=1\times x+0\times y\end{cases}\leftrightarrow A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

[※(4)の線形変換は，逆関数を求める変換となります]

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝