2.6　ケーリー・ハミルトンの定理

ケーリー・ハミルトンの定理とは？

○次の公式をケーリー・ハミルトンの定理と言います。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，次の関係式が成り立つ。

［ケーリー・ハミルトンの定理］　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

証明）$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

2.7　例題(特別な場合)

1）$\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=0 \end{cases}\cdots①$　のとき　$A^2=O$

①を満たす(零行列ではない)行列 A を見つけてください。

例えば　$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$　とすると

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

よって，$n\geqq 2$ に対しては　$A^n=O$　となります。

［証明：$A^n=A^{n-2}A^2=A^{n-2}O=O$］

※皆さんは，どのような行列 A を見つけることができましたか。
　一般には，次の様な表記になります。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$　（但し　$bc=-a^2$）

例題　$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ。

［解答］ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(2-2)A+(-4+4)E=O \quad \Rightarrow \quad A^2=O$$

よって　ｉ）$n=1$ のとき　$A^n=A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

ⅱ）$n \geqq 2$ のとき　$A^n=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

問 11.6　次の行列の[　　]内に指定された累乗 A^n を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}6 & 9\\ -4 & -6\end{pmatrix}$　[$n=7$]

２）$\begin{cases}a+d=0\\ ad-bc=\lambda(\neq 0)\end{cases}$ …②　のとき　$A^2=-\lambda E$

このとき，単位行列は数字の１に相当することに注意すると

[単位行列(性質)：$AE=EA=A$]

$$A^3=A^2A=-\lambda EA=-\lambda A \qquad A^4=(A^2)^2=(-\lambda E)^2=\lambda^2E^2=\lambda^2E$$

$$A^5=A^4A=\lambda^2EA=\lambda^2A \qquad A^6=(A^2)^3=(-\lambda E)^3=-\lambda^3E^3=-\lambda^3E$$

$$A^7=A^6A=-\lambda^3EA=-\lambda^3A \qquad A^8=(A^2)^4=(-\lambda E)^4=\lambda^4E^4=\lambda^4E$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

つまり　$A^{2n-1}=(-\lambda)^{n-1}A$　$A^{2n}=(-\lambda)^nE$　が導けます。

例題　$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ のとき，A^7 を求めよ。

［解答］ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(2-2)A+(-4+6)E=O \quad \Rightarrow \quad A^2+2E=O$$

$$\therefore A^2=-2E$$

このとき　$A^7=(A^2)^3A=(-2E)^3A=-8A=-8\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -24\\ 16 & 16\end{pmatrix}$

問 11.6　次の行列の[　　]内に指定された累乗 A^n を求めよ。

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$　[$n=8$]

3） $\begin{cases} a+d=\lambda(\neq 0) \\ ad-bc=0 \end{cases}\cdots③$　のとき　$A^2=\lambda A\cdots④$

【注意：行列には零因子という性質があるので，約分はできません！】

このときは，次のような計算になります。

$$A^3=A^2A=(\lambda A)A=\lambda A^2=\lambda(\lambda A)=\lambda^2 A$$
$$A^4=A^3A=(\lambda^2 A)A=\lambda^2 A^2=\lambda^2(\lambda A)=\lambda^3 A$$
$$A^5=A^4A=(\lambda^3 A)A=\lambda^3 A^2=\lambda^3(\lambda A)=\lambda^4 A$$
$$\vdots$$

つまり　$A^n=\lambda^{n-1}A\cdots⑤$　が導けます。

※④の両辺の左側から，A^{n-1}を掛けると

$$A^{n-1}A^2=\lambda A^{n-1}A \quad \Rightarrow \quad A^{n+1}=\lambda A^n\cdots⑥$$

⑥は，等比数列の漸化式 $a_{n+1}=\lambda a_n$　とも考えられます。

よって，⑤は初項A，公比λの等比数列の形となります。

例題　$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，A^5 を求めよ。

［解答］ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(-1+4)A+(-4+4)E=O \quad \Rightarrow \quad A^2-3A=O$$
$$\therefore A^2=3A$$

このとき，両辺に左側からA^{n-1}を掛けると　$A^{n+1}=3A^n$

よって，初項A，公比3の等比数列の漸化式とみなせるので

$$A^5=3^4A=81\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -81 & -162 \\ 162 & 324 \end{pmatrix}$$

問 11.6　次の行列の[　　]内に指定された累乗A^nを求めよ。

(3)　$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$　$[n=9]$

2.8　例題（一般の場合）

復習から

$\boxed{\text{問題}}$　x^4 を２次式 $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余り $px+q$ を求めよ。

○実際に割り算をしてみます。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+7 \\
\hline
x^2-3x+2 & x^4 \\
 & \underline{x^4-3x^3+2x^2} \\
 & \quad 3x^3-2x^2 \\
 & \quad \underline{3x^3-9x^2+6x} \\
 & \qquad 7x^2-6x \\
 & \qquad \underline{7x^2-21x+14} \\
 & \qquad\quad 15x-14
\end{array}
$$

[※乗数が大きくなると，この計算では無理が生じます]

○恒等式の手法で導きます。

商を $Q(x)$ とすると　　$x^4=(x-1)(x-2)Q(x)+px+q$

恒等式より

$x=1$ を代入　　$1=\boxed{0\times(-1)\times Q(1)}+p+q$　$\Rightarrow$　$1=p+q\cdots①$

$x=2$ を代入　$16=\boxed{1\times\ 0\ \times\ Q(2)}+2p+q$　$\Rightarrow$　$16=2p+q\cdots②$

↑(※計算上 0 で消える！)

①－②より　$-15=-p$　　$\therefore\ p=15$

①より　$1=15+q$　　$\therefore\ q=-14$

従って，求める余りは　$15x-14$

[※商を求めることなく，余りだけを求めることができます]

○それでは，次の問題は解けますか？

$\boxed{\text{問題}}$　x^n を２次式 $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの余り $px+q$ を求めよ。

○解答です。

商を $Q(x)$ とすると　　$x^n=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+px+q$

恒等式より　$x=\alpha$　を代入　$\alpha^n=p\alpha+q\cdots$①

$x=\beta$　を代入　$\beta^n=\beta p+q\cdots$②

②−①より　$\beta^n-\alpha^n=(\beta-\alpha)p$　　$\therefore\ p=\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$

②×α −①×β より　　$\alpha\beta^n-\beta\alpha^n=-(\beta-\alpha)q$　　$\therefore\ q=-\dfrac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\beta-\alpha}$

従って，求める余りは　$\dfrac{(\beta^n-\alpha^n)x-(\alpha\beta^n-\beta\alpha^n)}{\beta-\alpha}$

○通常は，交換法則は使用できませんが，

累乗 A^n 同士では可換となるので，展開公式(＝因数分解)が可能です。

つまり，次なる関係式が成り立ちます。

$$A^n=(A-\alpha E)(A-\beta E)Q(A)+pA+qE$$

特に，$(A-\alpha E)(A-\beta E)=A^2-(\alpha+\beta)A+\alpha\beta E$

$$=A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} a+d=\alpha+\beta \\ ad-bc=\alpha\beta \end{cases}$$

が成り立つとき，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

であるから，次なる関係式が得られます。

$$A^n=pA+qE=\frac{(\beta^n-\alpha^n)A-\left(\alpha\beta^n-\beta\alpha^n\right)E}{\beta-\alpha}$$

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$\Rightarrow\quad (A-\alpha E)(A-\beta E)=O$　のとき

［累乗］　$A^n=\dfrac{(\beta^n-\alpha^n)A-\left(\alpha\beta^n-\beta\alpha^n\right)E}{\beta-\alpha}$

例題　$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ のとき，A^n を求めよ。

［解答］ケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2-5A+6E=O$　　　$\therefore (A-2E)(A-3E)=O$

よって　$[\alpha=2,\ \beta=3$ とすると$]$

$$A^n=\frac{1}{3-2}\left\{(3^n-2^n)A-(2\cdot 3^n-3\cdot 2^n)E\right\}$$

$$=(x-y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}-(2x-3y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$　（但し　$x=3^n$，$y=2^n$）

$$=\begin{pmatrix}x-y & -x+y\\ 2x-2y & 4x-4y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x-3y & 0\\ 0 & 2x-3y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-x+2y & -x+y\\ 2x-2y & 2x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3^n+2\cdot 2^n & -3^n+2^n\\ 2\cdot 3^n-2\cdot 2^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{pmatrix}$$

問 11.6　次の行列の[　　]内に指定された累乗 A^n を求めよ。

(4)　$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$　$[n=10]$

＝＝

【研究】 $\beta=\alpha$ の場合

$x^n=(x-\alpha)^2Q(x)+px+q\cdots$① とおく。

恒等式より　$x=\alpha$　を代入　$\alpha^n=p\alpha+q\cdots$②

①を微分する　$nx^{n-1}=\{2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)\}+p$

恒等式より　$x=\alpha$　を代入　$n\alpha^{n-1}=p\cdots$③

③を②に代入　$\alpha^n=(n\alpha^{n-1})\alpha+q=n\alpha^n+q$　　$\therefore q=-(n-1)\alpha^n$

よって，求める余りは　　$n\alpha^{n-1}x-(n-1)\alpha^n$

従って，次の関係式を導くことができる。

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$\Rightarrow$　$(A-\alpha E)^2=O$　のとき

［累乗］　$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$

$=\alpha^{n-1}\{nA-(n-1)\alpha E\}$

＝＝