1.7 単位行列の性質

単位行列の性質とは？

まずは復習からです。

○ $m=n$ である行列を，**n 次正方行列**という。

［正方行列］ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ： $n\times n$ 型行列

○ n 次正方行列において，

1）行番号と列番号が同じである成分$[a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}]$を
対角成分という。

［対角成分］ 正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

2）対角成分がすべて１，対角成分以外がすべて０である行列を
単位行列といい，記号 E で表す。

［単位行列］ 正方行列 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【注意】単位行列 E は，数字の１に相当する行列です。

ここで，紹介するのは上記の【注意】の部分です。
単位行列 E に関して，次の公式(性質)が成り立ちます。

［単位行列(性質)］ $AE=EA=A$

例） $AE=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=A$

$$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=A$$

§２　２次正方行列

2.1　２次正方行列

２次正方行列について

今までは，一般の $m \times n$ 型行列について，話をしました。
ここからは，**２次正方行列**のみを取扱います。

［２次正方行列］　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　：　2×2 型行列

【注意】通常は　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$　と表記すべきですが，

今後は，簡便のために　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　と表記します。

2.2　復習

まずは，復習から

○行列の相等

［相等］　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$　のとき

$$A = B \iff \begin{matrix} a = e & b = f \\ c = g & d = h \end{matrix}$$

○行列の計算

［加　　法］　$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

［数との積］　$sA = s\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa & sb \\ sc & sd \end{pmatrix}$

［乗　　法］　$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

○特別な行列

［零行列］ $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

性質：(1) $A+O=O+A=A$　　(2) $0A=O$

(3) $AO=OA=O$

［単位行列］ $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

性質： $AE=EA=A$

○各種法則（s, t は数とする）

［交換法則］

$A+B=B+A$　　$sA=As$

$\boxed{AB\neq BA}$ ←[※注意！]

［結合法則］

$(A+B)+C=A+(B+C)$　　$(st)A=s(tA)$

$(AB)C=A(BC)$ NEW

［分配法則］

$(s+t)A=sA+tA$　　$s(A+B)=sA+sB$

$(A+B)C=AC+BC$ NEW　　$A(B+C)=AB+AC$ NEW

【注意】数と行列の計算で，唯一異なる点が，

『積に関する交換法則が成り立たない』

ということです。

これは，とっても重要な内容です。

2.3　累乗

累乗とは？

○２個の積を　$AA=A^2$　［２乗］

３個の積を　$AAA=A^3$　［３乗］

⋮

n 個の積を　$AA\cdots A=A^n$［n 乗］　と表します。

○これらの総称を，**累乗**といいます。

例題　$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ のとき，A^2，A^3 を求めよ。

［解答］　$A^2=AA=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-4 & -6-8\\ 6+8 & -4+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -14\\ 14 & 12\end{pmatrix}$

$$A^3=A(AA)=AA^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -14\\ 14 & 12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}15-28 & -42-24\\ 10+56 & -28+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & -66\\ 66 & 20\end{pmatrix}$$

【注意】結合法則は成立するので，次式でも計算できる。

$$A^3=(AA)A=A^2A=\begin{pmatrix}5 & -14\\ 14 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}15-28 & -10-56\\ 42+24 & -28+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & -66\\ 66 & 20\end{pmatrix}$$

問 11.3　$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ のとき，A^2，A^3 を求めよ。

【確認】何故，交換法則が使えないことが，重要な内容なのか。
それは，掛ける順番(左側か右側か)に気を付ける必要があるからです。

例）数の場合は，次の展開公式が使えます。

［展開公式］　(1)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

しかし，行列では，この展開公式は使用することができません。
なぜならば，交換法則が不成立だからです。　$[AB \neq BA]$

(1)の場合は　$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$$=AA+AB+BA+BB$$

$$=A^2\underline{\underline{+AB+BA}}+B^2 \quad [AB+BA \neq 2AB]$$

(2)の場合は　$(A+B)(A-B)=AA-AB+BA-BB$

$$=A^2\underline{\underline{-AB+BA}}-B^2 \quad [-AB+BA \neq O]$$

2.4 可換

可換とは？

○２つの行列 $A,\ B$ に対して，
交換法則が成り立つとき， A と B は**可換**であるという。

［可換］　A と B は可換　$\Leftrightarrow$　$AB=BA$

例題　$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix}x & y\\ a & b\end{pmatrix}$ は可換とする。

このとき， $x,\ y$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

［解答］ $AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-2a & 3y-2b\\ 2x+4a & 2y+4b\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}x & y\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+2y & -2x+4y\\ 3a+2b & -2a+4b\end{pmatrix}$

よって，可換$[AB=BA]$より

$$\begin{cases}3x-2a=3x+2y\\ 3y-2b=-2x+4y\\ 2x+4a=3a+2b\\ 2y+4b=-2a+4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2y-2a=0 & \cdots①\\ 2x-y-2b=0 & \cdots②\ (=③)\\ 2x+a-2b=0 & \cdots③\\ 2y+2a=0 & \cdots④\ (=①)\end{cases}$$

①と④から同じ式が得られる。　$y+a=0$　　$\therefore\ y=-a\cdots⑤$

⑤を②に代入すると，③と同じ式が得られる。

$2x+a-2b=0$　　$\therefore\ x=(2b-a)/2$

（答）　$x=(2b-a)/2$ ，　$y=-a$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【補足】 $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ と可換な行列の形は　$B=\begin{pmatrix}(2b-a)/2 & -a\\ a & b\end{pmatrix}\cdots(*)$

例えば，$a=4,\ b=1$　とすると　$B=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ が得られる。

実際　$AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-8 & -12-2\\ -2+16 & -8+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -14\\ 14 & -4\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-8 & 2-16\\ 12+2 & -8+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -14\\ 14 & -4\end{pmatrix}$

また， $A,\ A^2,\ A^3$ [前頁参照]も，可換な行列の形(*)になっています。

よって， A と A^2 は可換より　$AA^2=A^2A$　が成り立ちます。

問 11.4　$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix}x & y\\ a & b\end{pmatrix}$ は可換とする。

このとき，$x,\ y$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

＝＝

【参考】 $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$，　$C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ のとき

［結合法則］　① $(AB)C=A(BC)$

［分配法則］　② $(A+B)C=AC+BC$　　　③ $A(B+C)=AB+AC$

が成り立つことを確認しておきましょう。

① $$(AB)C=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+12 & 1-8\\ 6-3 & -2+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9 & -7\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18-7 & 36-35\\ 6+0 & 12+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 1\\ 6 & 12\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6-1 & 12-5\\ 6-2 & 12-10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+16 & -7+8\\ 10-4 & 14-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 1\\ 6 & 12\end{pmatrix}$$

$\therefore (AB)C=A(BC)$

② $$(A+B)C=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+3 & 8+15\\ 10-3 & 20-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 23\\ 7 & 5\end{pmatrix}$$

$$AC+BC=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+4 & -4+20\\ 4-1 & 8-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6-1 & 12-5\\ 6-2 & 12-10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 16\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 23\\ 7 & 5\end{pmatrix}$$

$\therefore (A+B)C=AC+BC$

③　$\boxed{\text{課題}}$

＝＝

2.5　零因子

零因子とは？

○行列においては，積の交換法則が不成立です。

○もう一つ，数と異なる現象が起きます。

［数 の場合］　$ab=0$ ならば　$a=0$　又は　$b=0$　（真）

しかし，

［行列の場合］　$AB=0$ ならば　$A=O$　又は　$B=O$　（偽）

となります。

○反例は，次の通りです。

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ のとき，

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-6 & -2+2\\ 18-18 & -6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$$

○この様に，零行列でない２つの行列 $A,\ B$ が

$AB=O$ を満たすとき，**零因子**であるといいます

［零因子］　$A,\ B$ が零因子　$\Leftrightarrow$　$AB=O$　（但し　$A,\ B\neq O$）

例題　$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ a & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ x & y\end{pmatrix}$ が零因子となるような $a,\ x,\ y$ を求めよ。

［解答］　$AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ a & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2x & 12-2y\\ 2a+4x & 4a+4y\end{pmatrix}$

よって，零因子［$AB=O$］より

$6-2x=0\cdots$①　$12-2y=0\cdots$②

$2a+4x=0\cdots$③　$4a+4y=0\cdots$④

①と②より　$x=3,\ y=6\cdots$⑤

⑤を③と④に代入すると同じ式が得られる　$a+6=0$　　$\therefore a=-6$

（答）$a=-6,\ x=3,\ y=6$

問 11.5　$A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ a & 9\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ x & y\end{pmatrix}$ が零因子となるような $a,\ x,\ y$ を求めよ。