

第 11 章 行列

§ 1 行列

1.1 行列

行列とは？

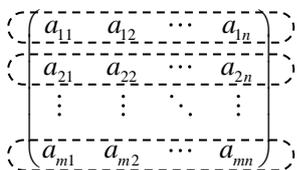
○数を長方形の形に整列させ、丸括弧()でくくったものを
行列という。

$$[\text{行列}] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

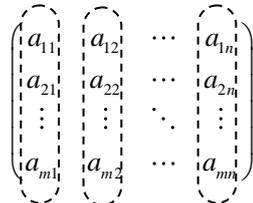
○行列内の数について

- 1) 上から下へ順に, 1 行, 2 行, ..., m 行と数える。
- 2) 左から右へ順に, 1 列, 2 列, ..., n 列と数える。

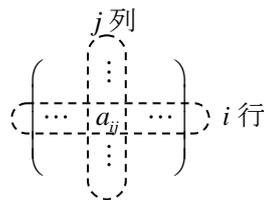
[行]



[列]



- 3) i 行 j 列にある数を a_{ij} と表記し,
 (i, j) 成分という。



○ m 行と n 列からなる行列を, **$m \times n$ 型行列**といい,
大文字 A を用いて表す(成分は小文字 a_{ij} を用いる)。

$$[\text{行列}] \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad : \quad m \times n \text{ 型行列}$$

1.2 特別な行列

特別な行列とは？

- 成分がすべて、0 である行列を、**零行列**といい、
記号 O [大文字のオー] で表す。

$$[\text{零行列}] \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad m \times n \text{ 型行列}$$

【注意】零行列 O は、数字の 0 に相当する行列です。

- $m = n$ である行列を、 **n 次正方行列** という。

$$[\text{正方行列}] \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad : \quad n \times n \text{ 型行列}$$

- n 次正方行列において、

- 1) 行番号と列番号が同じである成分 $[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$ を
対角成分 という。

$$[\text{対角成分}] \quad \text{正方行列} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2) 対角成分がすべて 1、対角成分以外がすべて 0 である行列を
単位行列 といい、記号 E で表す。

$$[\text{単位行列}] \quad \text{正方行列} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【注意】単位行列 E は、数字の 1 に相当する行列です。

このため、専門書によっては、記号 E ではなく
記号 I を用いるものがあります。

【確認試験】

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について

□ 行列 A は, × 型行列

□ (2, 3) 成分は $a_{23} =$

2. 次の行列の名称を記入せよ。

□ 行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□ 行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(答) アイ 3×4型行列 ウ $a_{23} = -1$ エ 零行列 オ 単位行列

○ $m=1$ または $n=1$ であるものは, **ベクトル**という。

1) $m=1$ のベクトルを, **行ベクトル**といい, 記号 \vec{a} で表す。

2) $n=1$ のベクトルを, **列ベクトル**といい, 記号 \vec{a} で表す。

[行ベクトル]	$\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$
[列ベクトル]	$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

【注意】 1) 行ベクトルは, **横ベクトル**とも呼ばれる。

2) 列ベクトルは, **縦ベクトル**とも呼ばれる。

○ 1×1 型行列は, 単なる1つの数であるから,

丸括弧()は必要ありません。

$$A = (a) \quad : \quad 1 \times 1 \text{型行列} \quad \Rightarrow \quad a \quad : \quad (\text{単なる1つの}) \text{数}$$

それでは, 行列(単なる数の集まり)に,
数学(計算式)を導入していきます。

1.3 行列の相等

相等とは？

○同じ型の2つの行列 A, B に対して

すべての成分が同じであるとき、2つの行列は**等しい**という。

$$[\text{相等}] \quad A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \text{for all } (i, j) \text{ 成分}$$

1.3 行列の加法減法

加法減法とは？

○同じ型の2つの行列 A, B に対して

同じ成分同士の足し算(引き算)を、行列の**加法(減法)**という。

$$[\text{加法減法}] \quad A \pm B = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & a_{ij} \pm b_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

例題 2×3 型行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき、

和 $A+B$ と差 $A-B$ を求めよ。

$$[\text{解答}] \quad \text{和} \quad A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2 & 3+2 & 2+(-3) \\ 2+(-1) & 3+3 & -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{差} \quad A-B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-2 & 3-2 & 2-(-3) \\ 2-(-1) & 3-3 & -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

【確認】 1) 1つ1つの成分(数)においては、

和に関する交換法則, 結合法則がなりたつので、

数の集合体である行列として全体を眺めても、

和に関する交換法則, 結合法則が成り立ちます。

$$[\text{交換法則}] \quad A+B = B+A$$

$$[\text{結合法則}] \quad (A+B)+C = A+(B+C)$$

2) 零行列 O について、次の公式(性質)が成り立ちます。

$$[\text{零行列(性質)}] \quad A+O = O+A = A$$

1.4 行列と数との積

行列と数との積とは？

○行列 A と数 s に対して,

行列 A のすべての成分を s 倍する計算を, **行列と数との積** という。

$$\text{[行列と数との積]} \quad sA (= As) = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & sa_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

例題 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ と, 数 3 との積を求めよ。

$$\text{[解答]} \quad 3A = 3 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

【確認】 3) 行列 A と数 0 との積は, 零行列 O になります。

$$\text{[零行列(性質)]} \quad 0A = O$$

4) 次の様な法則も成り立ちます。

$$\text{[交換法則]} \quad sA = As$$

$$\text{[結合法則]} \quad (st)A = s(tA)$$

$$\text{[分配法則]} \quad (s+t)A = sA + tA \quad s(A+B) = sA + sB$$

1.5 行列の線形性

線形性とは？

○今までの, 「行列と行列の加法」や「行列と数との積」は

次の公式(性質)が成り立つように導入されています。

この公式(性質)を, **線形性** といいます。

【線形性】 同じ型の 2 つの行列 A, B と数 s, t に対して

$$sA + tB = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & sa_{ij} + tb_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

例題 2×3 型行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき,

行列 $3A - 2B$ を求めよ。

[解答]
$$3A - 2B = 3 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 8 & 3 & -19 \end{pmatrix}$$

問 11.1 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき,

次の行列を求めよ。

- (1) $A - B$ (2) $2A$ (3) $A + 3B$

1.6 行列の乗法

行列の乗法とは？

○ $l \times m$ 型行列 A と $m \times n$ 型行列 B に対して

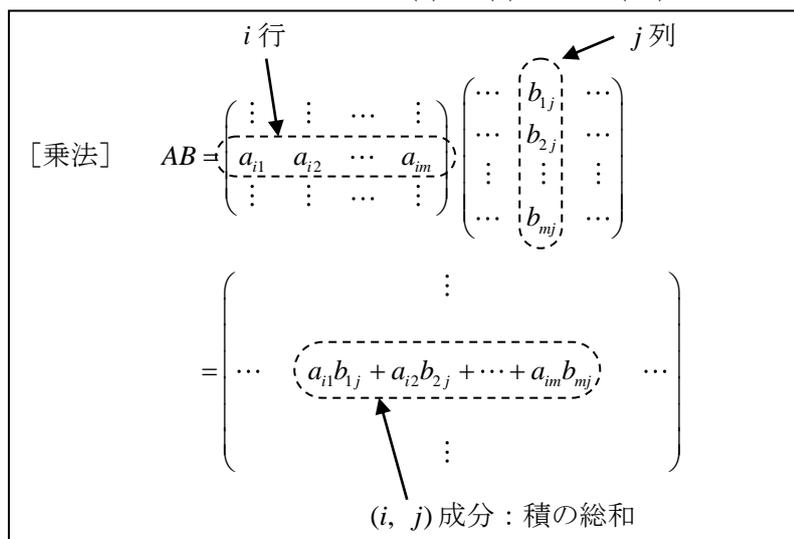
行列 A の i 行の m 個の成分 $[\overset{(1)}{a_{i1}} \ \overset{(2)}{a_{i2}} \ \cdots \ \overset{(m)}{a_{im}}]$ と

行列 B の j 列の m 個の成分 $[b_{1j} \ b_{2j} \ \cdots \ b_{mj}]$ の

個々の成分の積の総和を, 積 AB の (i, j) 成分とする。

$$[a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}]$$

(1) (2) (m)



例題 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ の積 AB を求めよ。

[解説]

① (1, 1) 成分を求める [A の 1 行目と B の 1 列目を使用する]

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times (-1) + 3 \times 4 + 2 \times 5 \\ -4 + 12 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \end{pmatrix}$$

② (1, 2) 成分を求める [A の 1 行目と B の 2 列目を使用する]

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 4 + 9 - 4 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \end{pmatrix}$$

③ (2, 1) 成分を求める [A の 2 行目と B の 1 列目を使用する]

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -2 + 12 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

④ (2, 2) 成分を求める [A の 2 行目と B の 2 列目を使用する]

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 2 + 9 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

[解答] $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 12 + 10 & 4 + 9 - 4 \\ -2 + 12 - 15 & 2 + 9 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$

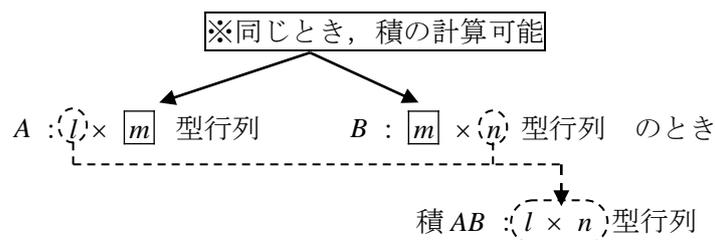
問 11.2 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} (-3 \ 1)$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

【確認】積 AB に関して

- 1) 加法減法は同じ型の行列のときに、計算ができます。
 乗法は、異なる型の行列で計算します。
 但し、 A の列数と B の行数が同ときに、計算ができます。
 また、積 AB は (A の行数) \times (B の列数) 型の行列になります。



- 2) 積に関して、最も重要な内容は、交換法則が成立しないことです。

[交換法則は不成立] $AB \neq BA$

実際、前頁の例題から

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+12+10 & 4+9-4 \\ -2+12-15 & 2+9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & -3+3 & -2-3 \\ 16+6 & 12+9 & 8-9 \\ 20-4 & 15-6 & 10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 22 & 21 & -1 \\ 16 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

明らかに、交換法則は不成立です。

- 3) 計算ができるとき、零行列 O に関して、次の公式(性質)が成り立つ。

[零行列(性質)]

(1) $A + O = O + A = A$	}	既に紹介済
(2) $OA = O$		
(3) $AO = O, OA = O$		

(※零行列 O は、数 0 に相当する行列です)