第11章　行列

§1　行列

1.1　行列

行列とは？

○数を長方形の形に整列させ，丸括弧(　)でくくったものを
行列という。

［行列］
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

○行列内の数について

1）上から下へ順に，１行，２行，…，m行と数える。

2）左から右へ順に，１列，２列，…，n列と数える。

［**行**］

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \downarrow$$

［**列**］

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \end{array}$$

3）i行j列にある数を　a_{ij}　と表記し，
(i，j)成分という。

$$\begin{array}{cc} j\text{列} & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & i\text{行} \end{array}$$

○m行とn列からなる行列を，**$m \times n$型行列**といい，
大文字Aを用いて表す(成分は小文字a_{ij}を用いる)。

［行列］
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad : \quad m \times n\text{型行列}$$

1.2　特別な行列

特別な行列とは？

○成分がすべて，０である行列を，**零行列**といい，
　記号O[大文字のオー]で表す。

［零行列］　$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$　：　$m \times n$ 型行列

【注意】零行列Oは，数字の０に相当する行列です。

○ $m=n$ である行列を，**n 次正方行列**という。

［正方行列］　$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$　：　$n \times n$ 型行列

○ n 次正方行列において，

1）行番号と列番号が同じである成分[a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}]を
　対角成分という。

［対角成分］　正方行列　$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

2）対角成分がすべて１，対角成分以外がすべて０である行列を
　単位行列といい，記号E で表す。

［単位行列］　正方行列　$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【注意】単位行列E は，数字の１に相当する行列です。
　このため，専門書によっては，記号E ではなく
　記号I を用いるものがあります。

行列_第 01 回

＝＝
【確認試験】

１．行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について

□行列 A は，$\boxed{\text{ア}}\times\boxed{\text{イ}}$ 型行列　　□ $(2,\ 3)$ 成分は $a_{23}=\boxed{\text{ウ}}$

２．次の行列の名称を記入せよ。

□行列 $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad\text{エ}\quad}$　　□行列 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\quad\text{オ}\quad}$

（答）アイ　3×4 型行列　ウ　$a_{23}=-1$　エ　零行列　オ　単位行列

＝＝

〇 $m=1$ または $n=1$ であるものは，**ベクトル**という。

1） $m=1$ のベクトルを，**行ベクトル**といい，記号 $\vec{\alpha}$ で表す。

2） $n=1$ のベクトルを，**列ベクトル**といい，記号 $\vec{a}$ で表す。

［行ベクトル］　$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

［列ベクトル］　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

【注意】1）行ベクトルは，**横ベクトル**とも呼ばれる。

2）列ベクトルは，**縦ベクトル**とも呼ばれる。

〇1×1型行列は，単なる１つの数であるから，

丸括弧(　)は必要ありません。

$A=(a)$　:　1×1型行列　$\Rightarrow$　a　:　(単なる１つの)数

それでは，行列(単なる数の集まり)に，

数学(計算式)を導入していきます。

1.3　行列の相等

相等とは？

○同じ型の２つの行列 $A,\ B$ に対して
すべての成分が同じであるとき，２つの行列は**等しい**という。

［相等］　$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$　for all $(i,\ j)$ 成分

1.3　行列の加法減法

加法減法とは？

○同じ型の２つの行列 $A,\ B$ に対して
同じ成分同士の足し算(引き算)を，行列の**加法**(**減法**)という。

［加法減法］　$A \pm B = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} \pm b_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$

例題　2×3 型行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，
和 $A+B$ と差 $A-B$ を求めよ。

［解答］　和　$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+2 & 3+2 & 2+(-3) \\ 2+(-1) & 3+3 & -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

差　$A-B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4-2 & 3-2 & 2-(-3) \\ 2-(-1) & 3-3 & -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

【確認】　1）１つ１つの成分(数)においては，
和に関する交換法則，結合法則がなりたつので，
数の集合体である行列として全体を眺めても，
和に関する交換法則，結合法則が成り立ちます。

［交換法則］　$A+B = B+A$

［結合法則］　$(A+B)+C = A+(B+C)$

2）零行列 O について，　次の公式(性質)が成り立ちます。

［零行列(性質)］　$A+O = O+A = A$

1.4　行列と数との積

行列と数との積とは？

○行列 A と数 s に対して，

行列 A のすべての成分を s 倍する計算を，**行列と数との積**という。

［行列と数との積］　$sA(=As)=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & sa_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$

例題　行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ と，数 3 との積を求めよ。

［解答］　$3A=3\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times4 & 3\times3 & 3\times2 \\ 3\times2 & 3\times3 & 3\times(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}$

【確認】　３）行列 A と数０との積は，零行列 O になります。

［零行列(性質)］　$0A=O$

４）次の様な法則も成り立ちます。

［交換法則］　$sA=As$

［結合法則］　$(st)A=s(tA)$

［分配法則］　$(s+t)A=sA+tA$　　$s(A+B)=sA+sB$

1.5　行列の線形性

線形性とは？

○今までの，「行列と行列の加法」や「行列と数との積」は

次の公式(性質)が成り立つように導入されています。

この公式(性質)を，**線形性**といいます。

［線形性］　同じ型の２つの行列 $A,\ B$ と数 $s,\ t$ に対して

$$sA+tB=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & sa_{ij}+tb_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

例題　2×3 型行列　$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\2&3&-3\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2&2&-3\\-1&3&5\end{pmatrix}$　のとき，

行列　$3A-2B$　を求めよ。

［解答］　$3A-2B=3\begin{pmatrix}4&3&2\\2&3&-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&2&-3\\-1&3&5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}12&9&6\\6&9&-9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&4&-6\\-2&6&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&12\\8&3&-19\end{pmatrix}$$

問 11.1　２次正方行列　$A=\begin{pmatrix}3&1\\-2&5\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2&-5\\4&3\end{pmatrix}$　のとき，

次の行列を求めよ。

(1)　$A-B$　　　(2)　$2A$　　　(3)　$A+3B$

1.6　行列の乗法

行列の乗法とは？

○ $l\times m$ 型行列 A と $m\times n$ 型行列 B に対して

$$\begin{array}{lcccccl}
\text{行列 } A \text{ の } i \text{ 行の } m \text{ 個の成分[} & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} & \text{]と} \\
 & (1) & (2) & & (m) & \\
\text{行列 } B \text{ の } j \text{ 列の } m \text{ 個の成分[} & b_{1j} & b_{2j} & \cdots & b_{mj} & \text{]の}
\end{array}$$

個々の成分の積の総和を，積 AB の $(i,\ j)$ 成分とする。

$$[\underset{(1)}{a_{i1}b_{1j}}+\underset{(2)}{a_{i2}b_{2j}}+\cdots+\underset{(m)}{a_{im}b_{mj}}]$$

i 行　　j 列

［乗法］　$AB=\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{im}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots&b_{1j}&\cdots\\\cdots&b_{2j}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\\cdots&b_{mj}&\cdots\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}&\vdots&\\\cdots&a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}&\cdots\\&\vdots&\end{pmatrix}$$

$(i,\ j)$ 成分：積の総和

例題　$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ の積 AB を求めよ。

［解説］

①(1, 1) 成分を求める［A の１行目と B の１列目を使用する］

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times(-1)+3\times4+2\times5 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4+12+10 & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & \\ & \end{pmatrix}$$

②(1, 2) 成分を求める［A の１行目と B の２列目を使用する］

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 4+9-4 \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ & \end{pmatrix}$$

③(2, 1) 成分を求める［A の２行目と B の１列目を使用する］

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -2+12-15 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & \end{pmatrix}$$

④(2, 2) 成分を求める［A の２行目と B の２列目を使用する］

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 2+9+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

［解答］$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+12+10 & 4+9-4 \\ -2+12-15 & 2+9+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$

問 11.2　次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

【確認】積 AB に関して

1）加法減法は同じ型の行列のときに，計算ができます。
乗法は，異なる型の行列で計算します。
但し，A の列数と B の行数が同ときに，計算ができます。
また，積 AB は(A の行数)×(B の列数)型の行列になります。

※同じとき，積の計算可能

A : $l \times \boxed{m}$ 型行列　　B : $\boxed{m} \times n$ 型行列　のとき

積 AB : $l \times n$ 型行列

2）積に関して，最も重要な内容は，交換法則が成立しないことです。

［交換法則は不成立］　$AB \neq BA$

実際，前頁の例題から

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$ のとき

$$AB=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+12+10 & 4+9-4 \\ -2+12-15 & 2+9+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 9 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+2 & -3+3 & -2-3 \\ 16+6 & 12+9 & 8-9 \\ 20-4 & 15-6 & 10+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 22 & 21 & -1 \\ 16 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

明らかに，交換法則は不成立です。

3）計算ができるとき，零行列 O に関して，次の公式(性質)が成り立つ。

［零行列(性質)］　(1)　$A+O=O+A=A$
(2)　$0A=O$　　（(1)(2) 既に紹介済）
(3)　$AO=O,\ \ OA=O$

(※零行列 O は，数 0 に相当する行列です)