演習　行列_第 06 回

学年[2]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　]　氏名　[　　　　　　　　　]

問 11. 13　次の像の方程式を求めよ。

(1) 線形変換 $f:\begin{cases} x' = 4x+3y \\ y' = 2x+y \end{cases}$ による直線 $2x+5y-4=0$ の像を求めよ。

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{4-6}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} x'-3y' \\ -2x'+4y' \end{pmatrix} \cdots ①$$

①を原像の方程式に代入すると

$$2\left(\frac{-x'+3y'}{2}\right)+5(x'-2y')-4=0$$

$$-x'+3y'+5x'-10y'-4=0$$

$$4x'-7y'-4=0$$

（答） $4x-7y-4=0$

(2) 原点まわり 60° 回転による 2 次曲線 $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=5$ の像

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x'+\sqrt{3}y' \\ -\sqrt{3}x'+y' \end{pmatrix} \cdots ①$$

①を原像の方程式に代入すると

$$\left(\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)^2-\sqrt{3}\left(\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)+2\left(\frac{-\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)^2=5$$

$$(x'^2+2\sqrt{3}x'y'+3y'^2)-\sqrt{3}(-\sqrt{3}x'^2+x'y'-3x'y'+\sqrt{3}y'^2)+2(3x'^2-2\sqrt{3}x'y'+y'^2)=20$$

$$(1+3+6)x'^2+(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3})x'y'+(3-3+2)y'^2=20$$

$$10x'^2+2y'^2=20 \qquad \therefore 5x'^2+y'^2=10$$

（答） $5x^2+y^2=10$ 　$\left(\Rightarrow \text{ 楕円 ： } \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{10}=1\right)$

問 11. 14　線形変換 $f:\begin{cases} x' = 2x-4y \\ y' = 3x-6y \end{cases}$ による直線 $x+y=1$ の像を求めよ。

$x+y=1$ より　$y=-x+1$

よって $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4x-4 \\ 3x+6x-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-4 \\ 9x-6 \end{pmatrix}$

$$x'=6x-4 \cdots ①,\ y'=9x-6 \cdots ②$$

①×３－②×２より　$3x'-2y'=0$ 　　（答） $3x-2y=0$