

学年[ 2 ]年 学科[ MI・AC・BC ] 番号[ ] 氏名 [ ]

問 11.9 線形変換  $f: \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$  について、

次の問いに答えよ。

(1) 線形変換  $f$  を表す行列  $A$  を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(2) 点  $P(5, 2)$  の像  $P'(x', y')$  の座標を求めよ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 4 \\ 25 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

(答)  $P'(11, 19)$

(3) 逆変換  $f^{-1}$  を表す行列を求めよ。

$$A^{-1} = \frac{1}{-9 + 10} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) 点  $Q'(3, 2)$  の原像  $Q(x, y)$  の座標を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 + 4 \\ -15 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(答)  $Q(-5, -9)$

問 11.10 原点のまわりに  $45^\circ$  回転する線形変換を  $f$  とする。

(1) 線形変換  $f$  を表す行列  $A$  を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 点  $P(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$  の像  $P'(x', y')$  の座標を求めよ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + 4 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(答)  $P'(3, -1)$

(3) 点  $Q'(-1, 3)$  の原像  $Q(x, y)$  の座標を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(答)  $Q(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

問 11.11 線形変換  $f$  を表す行列を  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

とし、線形変換  $g$  を表す行列を  $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$  と

するとき、合成変換  $f \circ g$  と  $g \circ f$  を求めよ。

$$(1) f \circ g \leftrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 + 2 & 3 - 4 \\ 10 - 6 & 6 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(2) g \circ f \leftrightarrow BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 + 6 & -5 + 9 \\ -2 + 8 & 2 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

問 11.12 原点のまわりに  $30^\circ$  回転する線形変換を  $f$  とする。このとき、合成変換  $f^4$  を表す行列を求めよ。

[Hint : 原点回りに  $30^\circ$  回転を 4 回行うと、最終的には原点回りに何度回転?]

$$f^4 \leftrightarrow A^4 = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$