

問 11.6 次の行列の[]内に指定された累乗 A^n を求めよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad [n=7]$$

ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 = O$

よって $A^7 = A^5 A^2 = A^5 O = O$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad [n=8]$$

ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - 3E = O \quad \therefore A^2 = 3E$

よって $A^8 = (A^2)^4 = (3E)^4 = 81E = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad [n=9]$$

ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 + A = O \quad \therefore A^2 = -A$

このとき、両辺の左側から A^{n-1} を掛けると $A^{n+1} = -A^n$

よって、初項 A 、公比 (-1) の等比数列の漸化式とみなせるので

$$A^9 = (-1)^8 A = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad [n=10]$$

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - A - 2E = O \quad \therefore (A+E)(A-2E) = O$$

よって $[\alpha = -1, \beta = 2 \text{ とすると}]$

$$A^{10} = \frac{1}{2 - (-1)} \{ (2^{10} - (-1)^{10})A - (-2^{10} - 2 \cdot (-1)^{10})E \}$$

$$= \frac{1}{3} \{ 1023A + 1026E \} = 341A + 342E$$

$$= 341 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 342 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 683 & 341 \\ 682 & 342 \end{pmatrix}$$