[成分表示と和・定数倍・内積] 2H1

(1)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$,　$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$　のとき次を求めよ。

$\vec{a}\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$

[内積となす角]

(2)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$　のとき,

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角は $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\pi\right)$ を求めよ。

[分点の位置ベクトル]

(3) 2 点 A (5, 5, 1)，B (1, −1, 1) について、

線分 AB を 3:1 に外分する点 P の座標はを求めよ。

[平行条件・垂直条件]

(4)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix}$

が平行であるように定数 x, y の値を定めよ。

(5)　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\1\\3\end{pmatrix}$

が垂直であるように定数 x の値を定めよ。

[球面の程式]

(6) 点 (1, −2, 1) を中心とする，半径 $\sqrt{6}$ の球面の方程式の一般形を求めよ。

(7)次の球面の方程式から、

球面の中心と半径を求めよ。

$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

[成分表示と和・定数倍・内積] 2H1

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ のとき次を求めよ。

$$\vec{a}\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\left\{3\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\10\\-13\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\10\\-13\end{pmatrix}=2\cdot4+2\cdot10+(-3)\cdot(-13)=67$$ （答）

[内積となす角]

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ のとき,

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角は $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\pi\right)$ を求めよ。

$$|\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=6$$

$$|\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=(-2)\cdot2+4\cdot(-2)+(-4)\cdot0=-12$$

より

$$\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-12}{6\cdot2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\underbrace{\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}$$ （答）

[分点の位置ベクトル]

(3) 2点 A(5, 5, 1)，B(1, −1, 1) について、

線分 AB を 3:1 に外分する点 P の座標はを求めよ。

外分なので、$m:n=3:-1$ に分ける点として

分点の位置ベクトルの公式を適用する

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\frac{(-1)\vec{a}+3\vec{b}}{3+(-1)}=\frac{1}{2}\left\{-\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\-8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$$ より　$\mathrm{P}\left(-1,-4,1\right)$ （答）

[平行条件・垂直条件]

(4) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix}$

が平行であるように定数 x, y の値を定めよ。

$\vec{a},\vec{b}$ が平行だから $\vec{b}=t\vec{a}$ （または、$\vec{a}=t\vec{b}$ ）より

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix}=t\vec{a}=\begin{pmatrix}2t\\tx\\t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\y=tx\\3=t\end{cases}$$ これを解いて

$t=3$ より $x=2t=2\cdot3=6$ 、$y=tx=3\cdot6=18$ （答）

(5) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\1\\3\end{pmatrix}$

が垂直であるように定数 x の値を定めよ。

$\vec{a},\vec{b}$ が垂直だから内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\x\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\1\\3\end{pmatrix}=2\cdot x+x\cdot1+1\cdot3=3x+3=0$$ より

$x=-1$ （答）

[球面の程式]

(6) 点 (1, −2, 1) を中心とする，半径 $\sqrt{6}$ の球面

の方程式の一般形を求めよ。

中心 (a,b,c) 半径 r の球面の方程式の公式

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ に代入して標準形は

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$ 　だから、

一般形はこれを展開して

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z=0$ （答）

(7)次の球面の方程式から、

球面の中心と半径を求めよ。

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

平方完成して標準形に直すと

$$\underbrace{x^2-4x}_{(x-2)^2-4}+\underbrace{y^2+2y}_{(y+1)^2-1}+\underbrace{z^2-2z}_{(z-1)^2-1}+1=0$$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$ より

中心 $(2,-1,1)$ 半径 $\sqrt{5}$ （答）