§２　部分積分法

2.1　部分積分法

部分積分法とは？

まずは，「積の微分」の復習から。

［積の微分］　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　…①

このとき，「微分」と「積分」は，お互いに「逆操作」なので

重要　「微分：$\{f(x)g(x)\}'$」を積分すると，
「元の関数：$f(x)g(x)$」に戻る

従って，次の関係式が成り立ちます。

①の両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\, dx$$

$$= \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx \quad \text{[線形性より]}$$

よって，「本日の内容：部分積分法」を導くことができます。

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

又は　$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$

次の関係式を，**部分積分法**という。

［部分積分法］　(A) $\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$

(B) $\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$

まずは，次の６つの不定積分が解けるようになりましょう。

[Type(A)]　(1) $\int xe^{ax}\, dx$　(2) $\int x\sin ax\, dx$　(3) $\int x\cos ax\, dx$

[Type(B)]　(4) $\int x\log x\, dx$　(5) $\int x^n \log x\, dx$　(6) $\int \log x\, dx$

2.2　部分積分法（A）

実際の計算方法について

例題を用いて，実際の計算方法を説明します。

$\boxed{\text{問題}}$　不定積分 $\int xe^{2x}\,dx$ を求めよ。

1）まず，e^{2x} を積分する(原始関数)を求める。

2）次に，「等号」を維持するために，微分記号をつける。

$$e^{2x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$$

[※積分して，微分すると元に戻る！]

積分(原始関数)

［解答編①］　$\int xe^{2x}\,dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$

この操作は何？

前頁の公式を確認してください。
どちらかに「ダッシュ(微分記号)」がないと使えません。
この操作は，公式を使うための“仕込み”です。

3）公式を発動する。

“仕込み”が終了したので，“調理開始”です。

“調理方法”は，３－１）微分積分記号をはずす。

３－２）引算でつなぐ。

３－３）[積分記号内の]微分記号を移動する。

［解答編②］　$\int xe^{2x}\,dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$　　：仕込み

$$= \underline{\underline{x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}} \boxed{-} \int \underline{\underline{(x)'\times\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}}\,dx$$　　：公式発動

微分積分記号をはずす　　引算でつなぐ　　微分記号を移動する

４）後は，基本公式を用いて，不定積分を求めます。

［解答編③］ $\int xe^{2x}\ dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$ [※この式は省略する]

$$\left[= x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int (x)'\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\ dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} \underline{\underline{- \frac{1}{4}e^{2x} + C}}$$

※基本公式(実践編)を用いる。
最後は，積分定数を忘れないように！

部分積分法を，今回様に書き直しておきます.

［type(A)］ $f(x) = x$， $g(x) = e^{ax}$, $\sin ax$, $\cos ax$ のとき

$$\int xg(x)\ dx = \int xG'(x)\ dx = xG(x) - \int G(x)\ dx \quad （※(x)' = 1 \text{ より}）$$

但し， $G(x)$ は $g(x)$ の原始関数 $[G'(x) = g(x)]$

例題 不定積分 $\int xe^{2x}\ dx$ を求めよ。

［解答］ $\int xe^{2x}\ dx = \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\ dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\ dx$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

問 9.5［その１］ 次の不定積分を求めよ。尚， C は積分定数とする。

(1) $\int xe^{-x}\ dx$ (2) $\int x\sin x\ dx$ (3) $\int x\cos 3x\ dx$

2.3　部分積分法（B）

今度は，タイプ(B)について

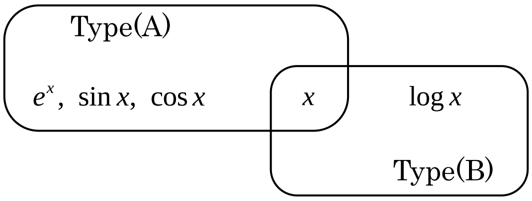
部分積分法の基本は

x と e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$ との積

の場合に使用されます。

但し，積の相手が $\log x$ かそうでないか（e^x, $\sin x$, $\cos x$）で

部分積分のタイプが異なります。



尚，積の相手が $\log x$ のときは，x は x^n (n は自然数)まで大丈夫です。

例題を用いて，実際の計算方法を説明します。

$\boxed{\text{問題}}$　不定積分 $\int x\log\ dx$ を求めよ。

1）まず，“仕込み”を行います。
　つまり，x を積分して微分記号を付ける。

［解答編①］　$\int x\log\ dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\ dx$

（※Type(A)は，x でない方に“仕込み”を行いますが，
　Type(B)は，x 自身に”仕込み”を行います。）

2）次に，公式を発動します。尚，$(\log x)' = \frac{1}{x}$ です。

［解答編②］　$\int x\log\ dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\ dx$

$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \int\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}\right)}}\,dx$$

↑[※必ず括弧(　)を記すこと！]

3）積分内を計算した後，基本公式を用いて不定積分を求める。

例題　不定積分 $\int x \log\, dx$ を求めよ。

［解答］ $\int x \log\, dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\, dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}\right)}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \boxed{\frac{1}{2}x}\, dx$$ （※必ず積分内を計算！）

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

問 9.5[その 2]　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(4) $\int x^2 \log x\, dx$

部分積分法を，今回様に書き直しておきます.

［type(B)］ $f(x) = x^n$，$g(x) = \log x$ のとき

$$\int x^n \log x\, dx = \int \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' \log x\, dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} \log x - \int \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} \times \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} \log x - \int \left(\frac{1}{n+1}x^{n}\right) dx$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C$$

（※この一連の流れが復元できるようになりましょう）

＝＝

【研究】 $\log x$ の積分は？

微分積分対応表

微分[導関数] $f'(x)$	← 関数 $f(x)$ →	積分[原始関数] $F(x)$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\log x$
$\frac{1}{x}$	$\log x$	？
ae^{ax}	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$a\cos ax$	$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
$-a\sin ax$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$

基本公式の中に，対数 $\log x$ の積分はなかったことに気付いていましたか。
[Type(B)]は n を自然数としていますが，実は $n=0$ の場合も使用可能です。

$n=0$ のとき： $f(x)=x^0=1$， $g(x)=\log x$

よって $\int \log x\,dx=\int (x)'\log x\,dx$ [※ $(x)'=1$ より]

$$=x\log x-\int\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx=x\log x-\int dx=x\log x-x+C$$

【注意】

1）積分記号の $\int$ は前括弧， dx は後括弧に相当します。

つまり、前括弧 $\int$ と後括弧 dx に挟まれた関数 $f(x)$ を積分します。

2） $f(x)=1$ のときは，次の様に省略されます。 $\int 1\,dx=\int dx$

＝＝