1.6　実践的な積分

実践的計算とは?

○微分の場合，この TEXT では，
「合成関数の微分」のことを，「実践的な微分」と呼んでいます。

例）基本公式：$(\sin x)' = \cos x$　に対して

実践的な計算は　$(\sin u)' = u' \times \cos u$　[※u' を掛ける！]

具体的には　$\{\sin(3x+2)'\} = 3\cos(3x+2)$　となります

○これと同様な手続きのものを，積分の場合も準備します。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

このとき，「実践的な微分」より

$$F'(ax+b) = a \times f(ax+b) \qquad (u = ax+b \text{ のとき})$$

となるので，次の関係式が成り立ちます

$$\frac{1}{a}F'(ax+b) = f(ax+b) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

	実践的な微分	実践的な積分
公式	$\{f(u)\}' = f'(u) \times u'$	$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
特色	u' を掛ける	(x の係数 a の逆数) $\frac{1}{a}$ を掛ける
例題	$\{\sin(3x+2)'\} = 3\cos(3x+2)$	$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$

※積分の場合は　$u = ax + b$　に限定されます。

次頁にもう少し具体的な公式一覧表を作成しています。

【基本公式】

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

⇨

【実践的な積分】

$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\times\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\log(ax+b)$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$
$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$

※(x の係数 a の逆数) $\frac{1}{a}$ を掛ける

例題　次の不定積分を求めよ。尚， C は積分定数とする。

(1) $\int(\boxed{2}x+3)^4\ dx = \frac{1}{\boxed{2}}\times\frac{1}{5}(2x+3)^5 + C = \frac{1}{10}(2x+3)^5 + C$

(2) $\int\frac{1}{\boxed{2}x+3}dx = \frac{1}{\boxed{2}}\log(2x+3)+C$

(3) $\int e^{\boxed{2}x+3}dx = \frac{1}{\boxed{2}}e^{2x+3}+C$

(4) $\int\sin(2x+3)\ dx = -\frac{1}{\boxed{2}}\cos(2x+3)+C$

(5) $\int\frac{1}{\cos^2(2x+3)}dx = \frac{1}{\boxed{2}}\tan(2x+3)+C$

問9.3　次の表を完成せよ[与えられた関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求めよ]。

$f(x)$	$F(x)$	(4)　$\sin(4x-3)$	
(1)　$(4x-3)^6$		(5)　$\cos(4x-3)$	
(2)　$\dfrac{1}{4x-3}$		(6)　$\dfrac{1}{\sin^2(4x-3)}$	
(3)　e^{4x-3}		(7)　$\dfrac{1}{\cos^2(4x-3)}$	

問9.4[その１]　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{(2x-1)^3}dx$　　(2)　$\displaystyle\int \sqrt[3]{2x-1}\ dx$　　(3)　$\displaystyle\int\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)dx$

【注意】１）指数の拡張(定義)　$\dfrac{1}{a}=a^{-1}$　$\left(\Rightarrow\ \dfrac{1}{a^n}=a^{-n}\right)$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$　$\left(\Rightarrow\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\right)$

２）指数法則　$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　$a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

$(a^m)^n=a^{mn}$　$\left(\Rightarrow\ (e^x)^2=e^{2x}\right)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【ちょっと一息：指数関数】

指数関数 e^x の微分も積分も，基本公式の計算結果は「変化しない」です。

［微分］　$(e^x)'=e^x$　　　　［積分］$\displaystyle\int e^x\ dx=e^x+C$

ところが，x の前に係数 a がつくと，話が違います。

○微分は，単純に係数 a が出てきます。　例）$(e^{3x})'=3e^{3x}$

○積分は，係数 a の逆数が出てきます。　例）$\displaystyle\int e^{3x}\ dx=\frac{1}{3}e^{3x}+C$

この場合は，出てきた結果で，微分したか積分したかがわかります。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

1.7　三角関数への応用

積を和に直す公式の復習

積を和に直す公式を用いた例題を考えます。
必要に応じて，前回の最終頁も参照してください。

［積を和に直す公式］

(10) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(11) $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(12) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(13) $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{-1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

【注意】 $\beta=\alpha$ の場合[※　$\sin 0=0,\ \cos 0=1$　]

(10) $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 0) = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$　[※(11)も同じ結果]

(12) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 0) = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

(13) $\sin^2\alpha = -\dfrac{1}{2}(\sin 2\alpha-\cos 0) = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

例題　次の不定積分を求めよ。尚， C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \cos 6x\cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int(\cos 8x+\cos 4x)\ dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C = \frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$$

(2) $\displaystyle\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\ dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

問 9.4[その２]　次の不定積分を求めよ。尚， C は積分定数とする。

(4) $\displaystyle\int \sin 5x\cos 3x\ dx$　　　　(5) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 2x\ dx$

1.8　対数関数への応用

新しい公式を導入します。

知っておくと，便利な公式を導入します。

［公式］　$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x) + C$

[※覚え方：分子が分母の微分のときは，log(分母）に変換！]

証明）実践的な微分より　$(\log u)' = \dfrac{u'}{u}$

つまり　$[\log\{f(x)\}]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x) + C$

例題　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \log(x^2+x+1) + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$　　(※[　]の部分は省略可能）

$$\left[= \frac{1}{\boxed{2}}\int \frac{\boxed{2}(x+1)}{x^2+2x+3}\,dx\right] = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + C$$

（※分子が分母の微分になるように
分母と分子に２を掛ける）

(3) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log(\sin x) + C$

問 9.4[その３]　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$　　(7) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$　　(8) $\displaystyle\int \tan x\,dx$