第９章　不定積分

§１　不定積分

1.1　不定積分

まずは，質問から。

ある関数を微分すると， $\cos x$ が得られました。
では，元の関数の正体は？

答えは $\sin x$ ですか。

正解です。
でも，無数に答えがありますよね。

無数にある？Hint をもらえますか。

定数を微分すると，零になります。

あ！わかりました。 $\boxed{}$ です。

さて，みなさんは $\sin x$ 以外の答えを見つけることができましたか？
$\sin x$ 以外の答えの例は

例） $f(x) = \sin x + 1$， $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{2}$， $f(x) = \sin x + \sqrt{3}$， $\cdots$ など

このため，一般的な答えは，次の様に表現されます。

（答） $\sin x + C$ （C は定数）

それでは，一般的な定義を，次頁で説明します。

〇関数を微分して得られた導関数が $f(x)$ のとき，
元の関数を， $f(x)$ の**不定積分**といい，次の記号で表す。

［不定積分の記号］ $\int f(x)\ dx$

（読み：インテグラル　エフ　エックス　ディ　エックス）

〇一般に「定数の微分は零である」ことから，
不定積分の定数を含まない根幹部分を，
(この TEXT では)**原始関数**と呼び，記号 $F(x)$ [大文字]で表す
また，定数 C のことを，**積分定数**という。

［不定積分］ $\int f(x)\ dx = F(x) + C$ （C は積分定数）

※前頁の場合
関数 $f(x) = \cos x$ の原始関数は $F(x) = \sin x$
不定積分は $\int \cos x\ dx = \sin x + C$ （C は積分定数）

1.2 基本公式

基本公式を求めよう

ここでは，基本公式を求めます。
それでは，もう一度，不定積分の定義の確認です。

不定積分 $F(x)+C$ を微分して得られる関数が $f(x)$ です。
つまり，次の関係式が成り立ちます。

［関係式］ $F'(x) = f(x)$

関数 $f(x)$ から，不定積分 $F(x)+C$ を求める計算を**積分**すると呼びます。
つまり，「微分の逆操作」を「積分」といいます。

［微分と積分］ $f(x) = F'(x) \ \underset{\text{（積分）}}{\overset{\text{（微分）}}{\Leftrightarrow}}\ \int f(x)\ dx = F(x) + C$

あらためて，基本公式を求めましょう。

【微分の基本公式】

$f(x)$	$f'(x)$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$

← (積分)

[Hint：積分は微分の逆操作]

【積分の基本公式】　[問題：作成せよ]

$f(x)$	$F(x)$
$\dfrac{1}{x}$	①
e^x	②
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	③
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	④
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	⑤

※原始関数 $F(x)$ を求めるので
積分定数 C は不要です。

積分の基本公式の表は完成しましたか。

答えは，順に　① $\log x$　② e^x　③ $-\cos x$　④ $\tan x$　⑤ $-\cot x$

【注意１】 $\cot x$ [読み：コタンジェント　エックス]とは？

$\cot x$ は $\tan x$ の逆数にあたる関数　$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

※参考： $\mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$，　$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

【注意２】③（※⑤も同様）については，少し工夫が必要です。

$f(x) = -\sin x$　のとき　$F(x) = \cos x$　（$\Rightarrow$　$F'(x) = f(x) = -\sin x$）

[(-1) 倍の修正を行う]

$f(x) = \sin x$　のとき　$F(x) = -\cos x$　（$\Rightarrow$　$F'(x) = f(x) = \sin x$）

1.3　基本公式２

再び質問です。
$f(x)=x^3$ の原始関数 $F(x)$ は分かりますか？

$$F'(x)=f(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad \int x^3dx=F(x)+C \qquad \text{では} \quad F(x)=?$$

【解答編】　　（１つ下がる）

$$F(x)=x^4 \quad \text{のとき} \quad f(x)=F'(x)=\boxed{4}x^3 \quad \Rightarrow \quad \int \boxed{4}x^3dx=x^4+C$$

（※$\boxed{4}$が不要！）

では，４で割ったものを考えてみましょう。

$$F(x)=\frac{1}{4}x^4 \quad \text{のとき} \quad f(x)=F'(x)=x^3 \quad \Rightarrow \quad \int x^3dx \underset{\text{(微分)}}{\overset{\text{(積分)}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{4}x^4+C$$

それでは，
$f(x)=x^n$ の原始関数 $F(x)$ は分かりますか？

$$F'(x)=f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad \int x^ndx=F(x)+C \qquad \text{では} \quad F(x)=?$$

【解答編】微分では乗数が１つ下がるので，
積分(微分の逆操作)では乗数が１つ上がります

$$F(x)=x^{n+1} \quad \text{のとき} \quad f(x)=F'(x)=(n+1)x^n \quad \Rightarrow \quad \int (n+1)x^ndx=x^{n+1}+C$$

次に，$(n+1)$ で割ったものを考えます

$$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad \text{のとき} \quad f(x)=F'(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad \int x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

［基本公式］　$\displaystyle\int x^ndx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ （但し　$n\neq -1$）

※覚え方

【微分の場合】

①　②

$$(x^{\boxed{n}})' = \boxed{n}\, x^{\boxed{n-1}}$$

①係数として，前に出す。

②右肩の乗数から 1 引く。

【積分の場合】

①

$$\int x^{\boxed{n}} dx = \boxed{\frac{1}{n+1}}\, x^{\boxed{n+1}}$$

②

①右肩の乗数に 1 を加える。

②係数として，「逆数」を持ってくる。

例題　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(1) $\int x^4 dx$　　(2) $\int \frac{1}{x^4} dx$　　(3) $\int \sqrt[4]{x}\, dx$

［解答］(1) $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

(2) $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{1}{-3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

(3) $\int \sqrt[4]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{4}}\, dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$

（※$\frac{5}{4}$ の逆数は，$\frac{1}{5/4}$ ではなく，単純に $\frac{4}{5}$ とすること）

問 9.1　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(1) $\int x\,dx$　　(2) $\int \frac{1}{x^2}dx$　　(3) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

1.4　基本公式３

定数を微分すると零ですが，
定数の原始関数は？

k を定数(実数)とする。

このとき　$\boxed{[\text{微分公式}]\quad (k)'=0}$

では，積分を考えてみましょう。

実は，次の　$\boxed{[\text{積分公式}]\ \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C}$ から計算できます。

[※ $x^0=1$]　[※ $n=0$ を適用]

$$\int k\,dx=\int k\,\boxed{x^0}dx=k\times\boxed{\frac{1}{0+1}x^{0+1}}+C=k\underline{\underline{x}}+C$$

[※覚え方：定数の積分は x が復活する]

それでは，第 1 回の積分の基本公式一覧をまとめておきます。

［基本公式］(1) $\int k\,dx=kx+C$　（k は実数）　：$n=0$ の場合

(2) $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$　：$n\neq -1$ の場合

(3) $\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}dx=\log x+C$　：$n=-1$ の場合

(4) $\int e^x\,dx=e^x+C$

(5) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

(6) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(7) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$

(8) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

1.5 線形性

線形性とは？

次の性質を積分に関する線形性と言います。

［線形性］ $\int \{af(x)+bg(x)\}dx = a\int f(x)\ dx + b\int g(x)\ dx$

（但し　a，b は定数）

証明は，微分に関する線形性を使用します。

［線形性］ $\{af(x)+bg(x)\}' = af'(x)+bg'(x)$　…①

微分と積分の関係より

$$\int f(x)\ dx = F(x)+C_1 \quad \Leftrightarrow \quad F'(x)=f(x)$$

$$\int g(x)\ dx = G(x)+C_2 \quad \Leftrightarrow \quad G'(x)=g(x)$$

よって

$$\begin{aligned}&\left\{a\int f(x)\ dx + b\int g(x)dx\right\}' \\ &= [a\{F(x)+C_1\}+b\{G(x)+C_2\}]' \\ &= aF'(x)+bG'(x) \\ &= af(x)+bg(x)\end{aligned}$$

微分　積分

従って，次なる関係式が成り立つ

$$\int \{af(x)+bg(x)\}dx = a\int f(x)\ dx + b\int g(x)\ dx$$

例題　次の不定積分を計算せよ。

(1) $\int (x+1)(x-3)dx$　　(2) $\int \left(2x-\frac{1}{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

(3) $\int (3e^x - 4\sin x)\ dx$　　(4) $\int (1+\tan^2 x)\ dx$

［解答］(1) $\int (x+1)(x-3)dx = \int (x^2-2x-3)\ dx$

$$\left[= \frac{1}{3}x^3 - 2\times\frac{1}{2}x^2 - 3x + C\right] = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$$

（↑※[　]の部分は省略できるようにする。）

（※ $n=-1$ 以外は x^n の形にしてから積分）

(2) $\displaystyle\int\left(2x-\frac{1}{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(2x-\boxed{\frac{1}{x}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

（※ $n=-1$ は変形不要，積分は $\log x$ ）

$\left[=2\times\frac{1}{2}x^2-\boxed{\log x}+3\times 2x^{\frac{1}{2}}+C\right]$ （←※省略できるようにする）

$=x^2-\log x+6x^{\frac{1}{2}}+C=x^2-\log x+6\sqrt{x}+C$

(3) $\displaystyle\int(3e^x-4\sin x)\ dx\ \left[=3\times e^x-4\times(-\cos x)+C\right]$

$=3e^x+4\cos x+C$ （↑※省略できるようにする）

(4) $\displaystyle\int(1+\tan^2 x)\ dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

【復習：三角関数の基本公式】

① $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$　　② $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

特に，②は４つの顔がありましたね。

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$　　$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

② $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\therefore\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　　$\therefore 1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

問 9.2　次の不定積分を求めよ。尚，C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(x-4)(x+3)\ dx$

(2) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

(3) $\displaystyle\int\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

(4) $\displaystyle\int(3e^x-5\cos x)\ dx$

(5) $\displaystyle\int\cot^2 x\ dx$

(6) $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\ dx$

不定積分_第 07 回

＝＝

三角関数に関する 20 本の公式は覚えていますか？[微分_TEXT05 を参照]

□全く覚えてない(0%)　□少し覚えていた(25%)　□半分くらい(50%)

□殆ど覚えていた(75%)　□全部覚えていた(100%)

［加法定理］

(01) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(02) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(03) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(04) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(05) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(06) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

［倍角公式］

(07) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(08) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

(09) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

［積を和に直す公式］

(10) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(11) $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(12) $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(13) $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{-1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

［和を積に直す公式］

(14) $\sin A+\sin B=2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(15) $\sin A-\sin B=2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(16) $\cos A+\cos B=2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(17) $\cos A-\cos B=-2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

［半角公式］

(18) $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$　(19) $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　(20) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

＝＝