2.8　三角関数

今回は三角関数 $\sin x,\ \cos x$ を取扱います。

Point は，**周期**が 2π であることです。

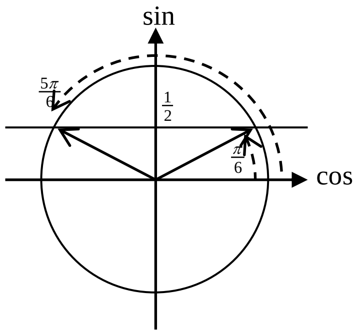
（※同じ形が繰り返される最小の範囲を**周期**と呼びます）

まずは，三角方程式の復習から

問題　方程式 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ を，$0 \leqq x < 2\pi$ の間で解け。

［解答］右図より

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$



【注意】１）通常，１周期（$0 \leqq x < 2\pi$）の中に解は，２つ存在する。

※ $\sin x = 1$ の解 $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ のように，解が１つの場合，

増減表(ジグザグ)を考えるときは，２重解扱いする

つまり，Pick up の対象としません。

２）一般解［範囲（$0 \leqq x < 2\pi$）を指定しない解]は，

回転数 n を付け加えて，次の様に表記される。

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$$

但し，逆回転も含めるので，n は整数となります。

【復習】三角関数の値

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

例題　関数 $y = x + \cos x$ の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べてグラフを描け。

［注意］定義域は実数全体です。

しかし，考える(取扱い)範囲は 1 周期分の $0 \leqq x < 2\pi$ です。

全体像のグラフは，この 1 周期分を複写して作成します。

［解答］１）両端の極限　→　両端の値

（※今回は都合により，単にある範囲(1 周期分)を切り取るだけなので，極限を取る必要はありません。）

[左端] $x = 0$ のとき　$y = 0 + \cos 0 = 1$

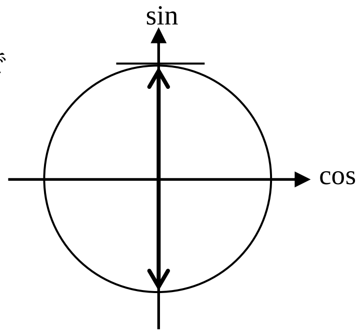
[右端] $x = 2\pi$ のとき　$y = 2\pi + \cos 2\pi = 2\pi + 1$

２）導関数と第２次導関数

$y' = 1 - \sin x$

Pick up：$\sin x = 1$ より　$x = \dfrac{\pi}{2}$

今回は，重解扱いとなるので
Pick up する点はなし。
(前頁の注意を参照)



$y'' = -\cos x$

Pick up：$\cos x = 0$ より　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

３）増減・凹凸表

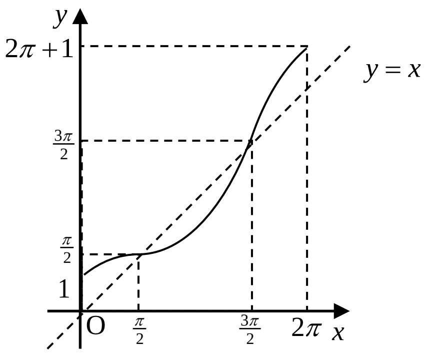
x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'				$+$			
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	↗	$\dfrac{\pi}{2}$ 変曲点	↗	$\dfrac{3}{2}\pi$ 変曲点	↗	$2\pi + 1$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{3\pi}{2}$ のとき　$y = \dfrac{3\pi}{2} + \cos\dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} + 0 = \dfrac{3\pi}{2}$

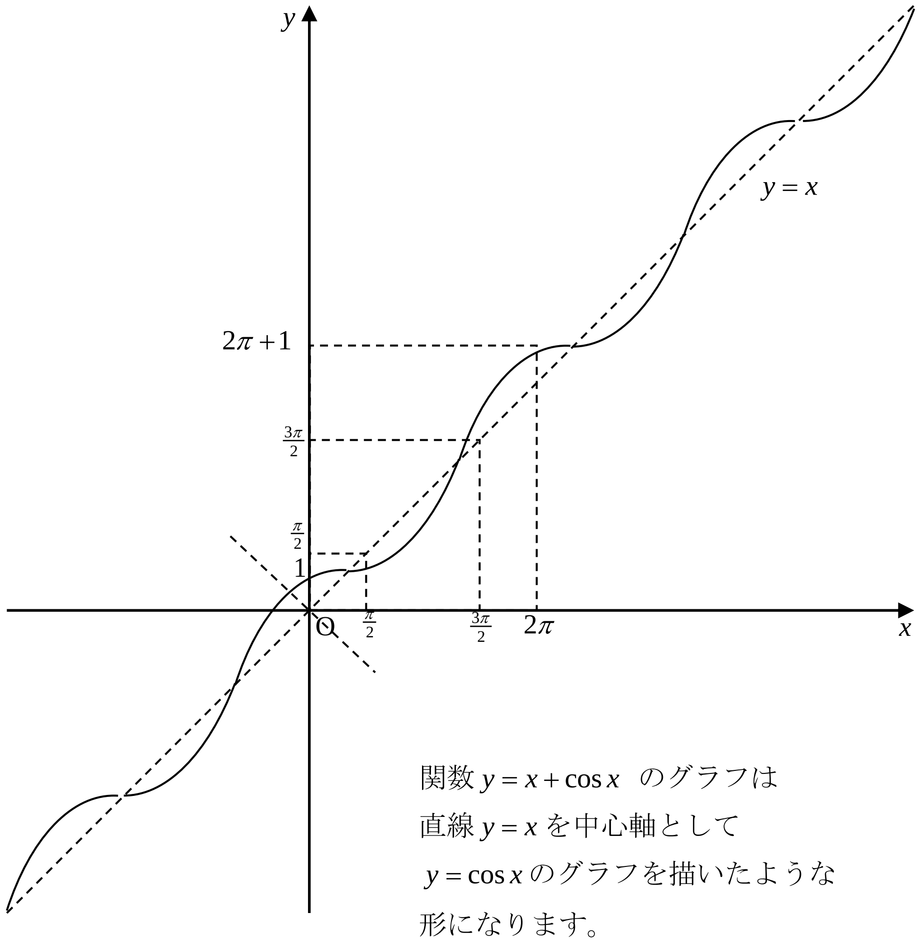
４）グラフ

まずは，1 周期分のグラフを描く。



実数全体へ拡張する。

（※周期性を利用して，グラフをつなげていきます）



関数 $y=x+\cos x$ のグラフは
直線 $y=x$ を中心軸として
$y=\cos x$ のグラフを描いたような
形になります。

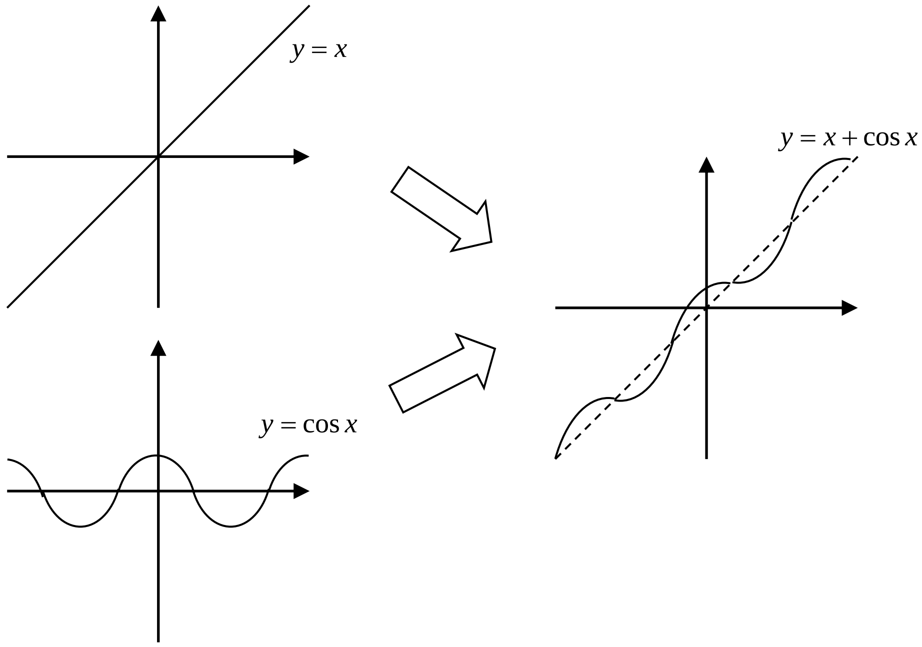
問 7.7　関数 $y=x+\sin x$ の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べてグラフを描け。但し，描く部分は 1 周期分の $0\leqq x<2\pi$ とする。

2.9　重ね合わせ

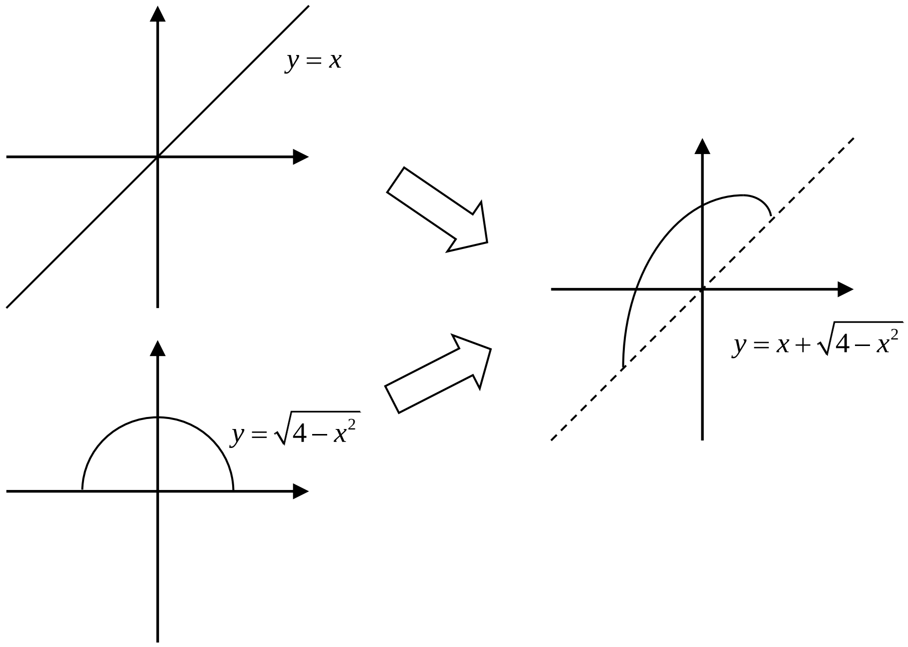
重ね合わせとは？

２つの関数の和(又は差)で作られる関数 $y = f(x) + g(x)$ を
２つの関数の**重ね合わせ**と呼ぶことにします。

例）$y = x$　と　$y = \cos x$　の重ね合わせ[前頁参照]



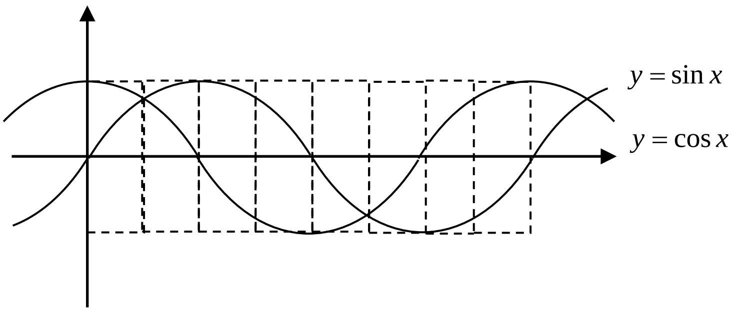
例）$y = x$　と　$y = \sqrt{4 - x^2}$　の重ね合わせ[TEXT_第 05 回参照]



$\boxed{\text{課題}}$　２つの関数 $y=x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフから，関数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフを描け。

2.10 重ね合わせ(Part 2)

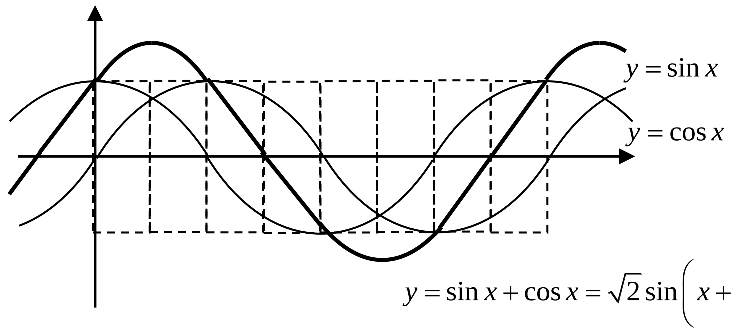
例） $y=\sin x$ と $y=\cos x$ の重ね合わせ



実際に，各点($\pi/4$毎)で数値計算してみましょう。

x	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	π	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$	1	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
和	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1

この結果を，先ほどのグラフの中に書き込みましょう。



$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

【復習：三角関数の合成】

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

2.11　付録

今回は，関数 $y=f(x)$ が表すグラフがわかっているとき

その ”逆数” にあたる関数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ が表すグラフについて説明します。

【今回の Point】

１） ±0 の逆数は　$\dfrac{1}{\pm 0}=\pm\infty$

特に，①両端で x 軸($y=0$)が漸近線になっているときに適用されます。

※ x 軸上側($+0$)の状態は，天上高く上昇($+\infty$)し，
x 軸下側(-0)の状態は，海底深く下降（ $-\infty$)します

②$x=a$ で x 軸と交わっているときは，

この点で切断され，方程式 $x=a$ が漸近線となります。

また，切断された正($+0$)の部分は，上空へ舞い上がり，

負(-0)の部分は，海中へ沈下します。

２） ±∞ の逆数は　$\dfrac{1}{\pm\infty}=\pm 0$

特に，③両端では，x 軸($y=0$)が漸近線になります。

※天上高くあるもの($+\infty$)は，x 軸上側($+0$)へ滑降し，
海底深くあるもの($-\infty$)は，x 軸下側($+0$)へ浮上します，

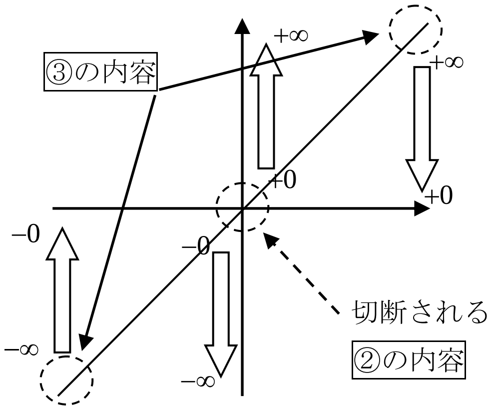
④方程式 $x=a$ が漸近線となっているところは

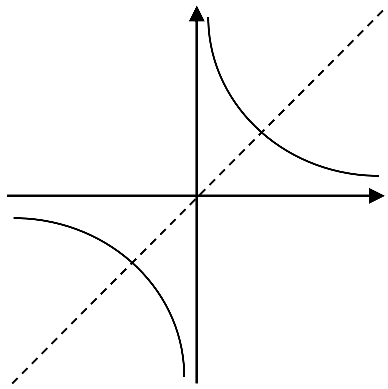
$x=a$ において，グラフは x 軸上で結合されます。

上記の内容は，なんとなくイメージできますか？
x 軸を海面(高度 0)に見たてて，下側を海中，上側を空中として
説明文を書いてみました。

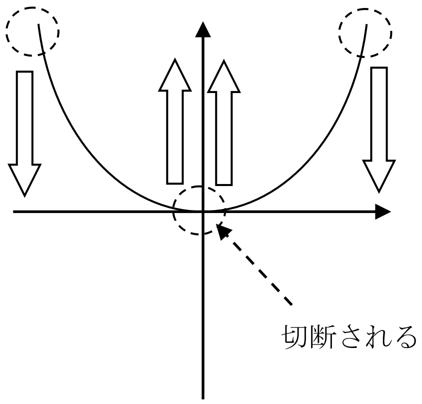
次頁にいくつかの例を挙げておきます。

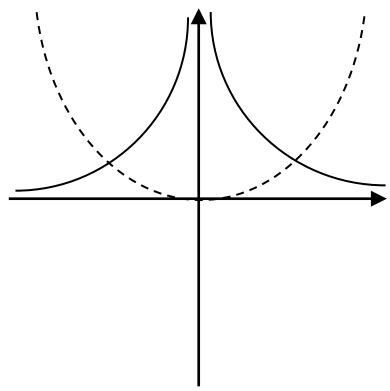
例１） $y = x$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{1}{x}$



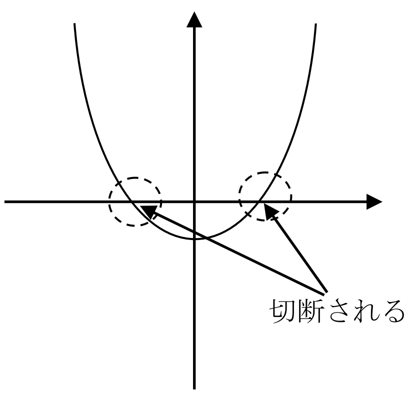


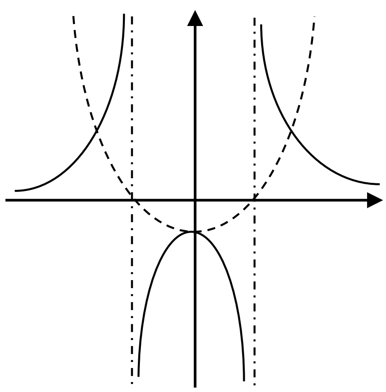
例２） $y = x^2$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{1}{x^2}$



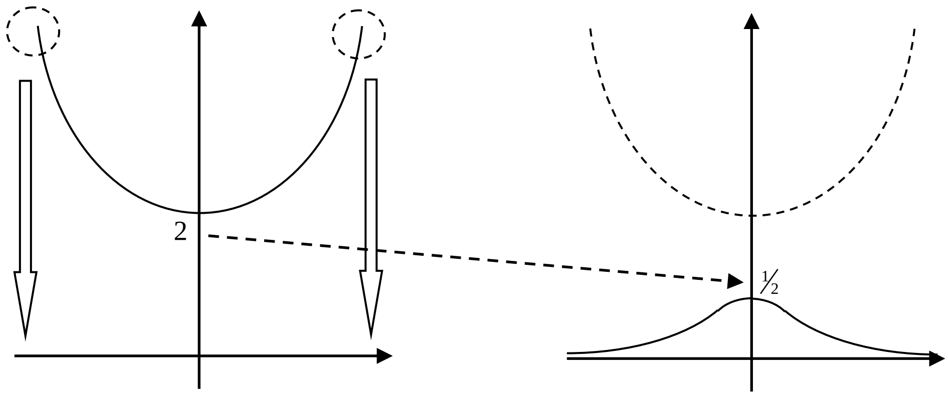


例３） $y = x^2 - 1$ $\Rightarrow$ $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ [演習_第04回を参照]





例４） $y=x^2+1$ 　⇒　 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 　[課題_第 04 を参照]



（※切断点はありません）

$\boxed{\text{課題}}$　関数 $y=x^2(x-3)$ のグラフから，関数 $y=\dfrac{1}{x^2(x-3)}$ のグラフを描け。

【参考】 $y=x^2(x-3)=x^3-3x^2$

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0 極大	↘	-4 極小	↗