2.5　関数の定義域

定義域とは？

関数　$y=f(x)$　において
変数 x の動く範囲を**定義域**といい，
それに伴い y が動ける範囲を**値域**と言います。

特に指定がないとき，定義域は実数全体（$-\infty<x<+\infty$）である。
但し，次の３つの関数を除くものとする。

①　分数関数　$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$　の定義域は　$g(x)\neq 0$

例）$y=\dfrac{1}{x^2-1}$　　定義域：$x\neq\pm 1$（前回演習参照；切断される）

[※：$x=\pm 1$ は漸近線となり，値を持たない]

例）$y=\dfrac{1}{x^2+3}$　　定義域：実数全体（前回課題参照；つながる）

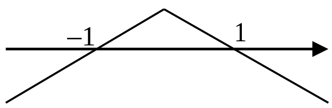
[※(分母)=0 とすると虚数解。よって，分母は実数では 0 にならない]

②　無理関数　$y=\sqrt{f(x)}$　の定義域は　$f(x)\geqq 0$

◎根号($\sqrt{\ }$)内が負の数の場合は虚数となるので，$f(x)<0$ となる
x の範囲は，定義域から削除されます。

例）$y=\sqrt{1-x^2}$　　定義域：$1-x^2\geqq 0$　　$\therefore -1\leqq x\leqq 1$

例）$y=\sqrt{x^2+1}$　　定義域：実数全体

※境界(=0 の部分)が重要です。
$1-x^2=0$　より　$x=\pm 1$


増減表と同じでジグザグで調べると
正の部分は　$-1\leqq x\leqq 1$
$x^2+1=0$　より　$x=\pm i$ [虚数解]となります。
つまり，符号が変化する境界(零点)がないので，常に正値。

③対数関数　$y=\log f(x)$　の定義域は　$f(x)>0$

◎対数関数には，真数(対数の中身)は正であるという条件があります。
この制約から，定義域は　$f(x)>0$　となります。

※無理関数の場合は定義域に等号が含まれますが，
対数関数の場合は定義域に通常含まれません。
特殊な場合を除き，等号部分は漸近線として表現されます。

2.6　無理関数

今回は，無理関数を取扱います。

例題　関数 $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べてグラフを描け。

［注意］定義域を確認しておこう。　　$4 - x^2 \geqq 0$　より　$-2 \leqq x \leqq 2$

［解法］１）両端の極限　$\displaystyle\lim_{x\to\pm 2}(x + \sqrt{4 - x^2}) = \pm 2 + 0 = \pm 2$（複号同順）

[※注意：$\displaystyle\lim_{x\to\boxed{\pm\infty}} f(x)$ ではないので，漸近線ではない！]

２）導関数と第２次導関数

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

（※微分公式 $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left[\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\right]$ を適用した。）

Pick up：$\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 1$　より　$\sqrt{4 - x^2} = x$ …①

①において，左辺[$\sqrt{4 - x^2}$]は非負関数より
右辺もまた非負となるので　$x \geqq 0$ …②
このとき，①の両辺を２乗すると

$4 - x^2 = x^2$　より　$2x^2 = 4$

$x^2 = 2$　　　$\therefore x = \pm\sqrt{2}$

ただし，②より　$x = \sqrt{2}$

$$y'' = -\frac{1 \times \sqrt{4 - x^2} - x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}}{(\sqrt{4 - x^2})^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{4 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \times\sqrt{4 - x^2}}{(\sqrt{4 - x^2})^2 \quad \times\sqrt{4 - x^2}}$$

※分母は $(\sqrt{4 - x^2})^2$ のままにしておくのが Point！
最後に３乗表記になります

$$= -\frac{(4 - x^2) + x^2}{(\sqrt{4 - x^2})^{\boxed{3}}} = -\frac{4}{(\sqrt{4 - x^2})^3}\left[= \frac{-4}{\sqrt{(2 + x)^3(2 - x)^3}}\right]$$

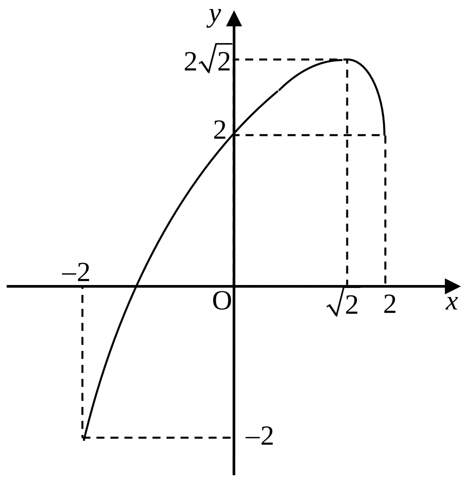
Pick up：分子から　なし　／　分母から　$x = \pm 2$

[※３重解(奇数個の重解)は１個として取り扱う]

３）増減・凹凸表

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$			
y	-2	↗	$2\sqrt{2}$ 極大	↘	2

４）グラフ



問 7.6　関数　$y = x\sqrt{4-x^2}$　の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べて

グラフを描け。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【課題の解答】

１）$\lim_{x \to \pm 2} \sqrt{4-x^2} = 0$

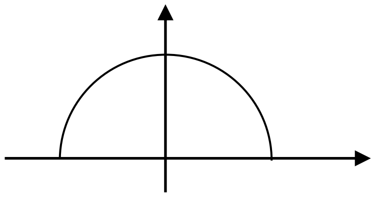
２）$y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$　（Pick up：分子から　$x=0$　／　分母から　$x=\pm 2$）

$y'' = \dfrac{-4}{(\sqrt{4-x^2})^3}$　（Pick up：分子から　なし　／　分母から　$x=\pm 2$]）

３）$x=0$　のとき　極大値　$y=2$

変曲点　なし

４）



（必要な数値等は記入すること！）

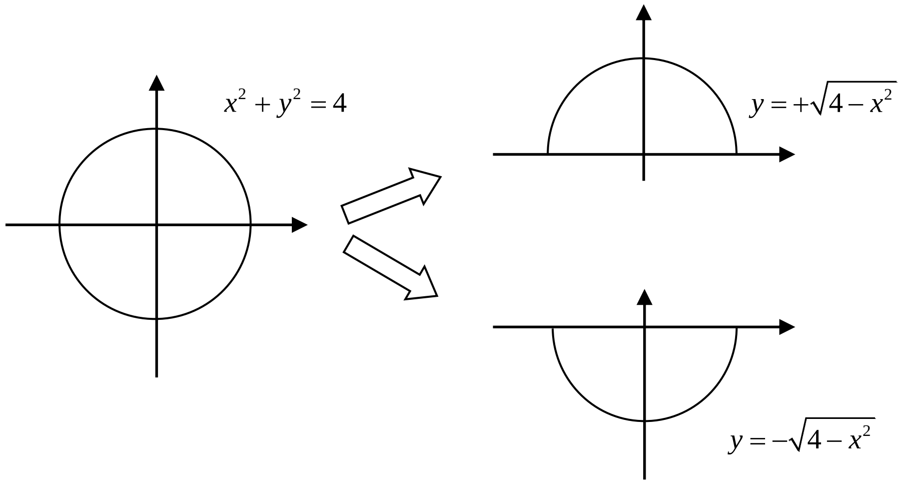
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2.7　付録

(1) 原点を中心とする半径が２の円の方程式は　　$x^2+y^2=4\cdots$①

　①を y について解くと　　$y^2=4-x^2$　より　$y=\pm\sqrt{4-x^2}$

　つまり，課題の関数のグラフは「上半円」となります。

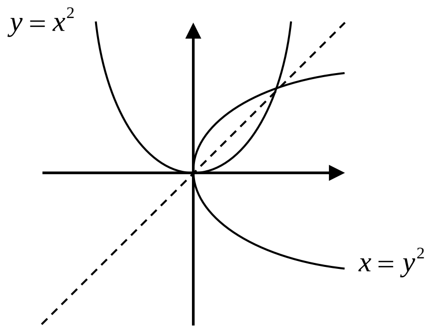


(2) 基本的な放物線の方程式は　$y=x^2$

　x と y を入替えると　　$x=y^2\cdots$①

　この入替える操作は,

　　$y=x$ に関しての対称移動となります。



　(1)と同様に

　①を y について解くと　$y=\pm\sqrt{x}$

　つまり，x 軸の上側(＋の部分)と x 軸の下側(－の部分)に分けられます。