2.3　分数関数

今回は，分数関数　$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$　を取扱います。

例）関数　$y=\dfrac{x+3}{x+1}$　グラフを描け。

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x+1 \,) & x+3 \\ & x+1 \\ \hline & \quad 2 \end{array}$$

【復習】①標準形：$y=1+\dfrac{2}{x+1}$　より　$y-1=\dfrac{2}{x+1}$

②漸近線：$\begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases}$　より　$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

※これは，基本のグラフ　$y=\dfrac{k}{x}$（今回は$k=2$）を

「x軸方向に-1，y軸方向に1だけ」

平行移動したことも意味している。

③グラフの概形

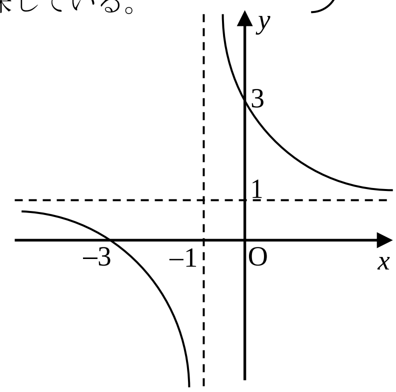
y切片（$x=0$）

$y=\dfrac{3}{1}=3$

x切片（$y=0$）

$\dfrac{x+3}{x+1}=0$

$x+3=0$　　$\therefore x=-3$



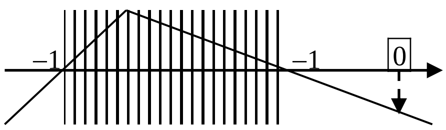
※基本的なグラフの場合は，x切片を求めますが，
一般的な場合，x切片の計算は通常行いません。

【微分】①導関数　$y'=\dfrac{1\times(x+1)-(x+3)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

Pick up：分子から　なし

分母から　$x=-1$（２重解)[←(　)^{2}の解に注意！]

ジグザグ：起点　$x=0$　のとき　$y'=-2<0$



※ジグザグ(符号の変化)を調べるとき，分子だけでなく，分母の値によって符号が変化するので、符号が変化する中間点(零点)の場所を分子と分母から求める必要があります。

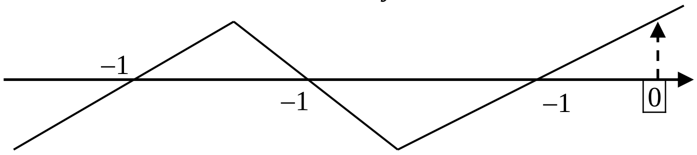
②第２次導関数　$y'' = -\dfrac{-2\times\{2(x+1)\times 1\}}{(x+1)^4} = \dfrac{4(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{4}{(x+1)^3}$

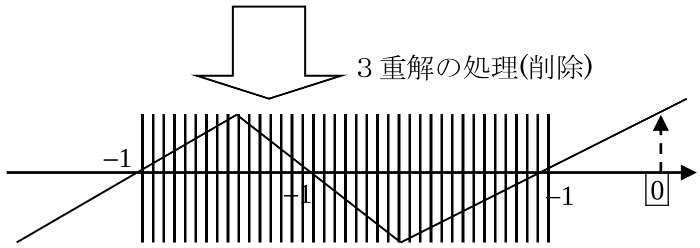
$\left(\text{※微分公式} \quad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\left[\Rightarrow \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}\right] \text{を適用} \right)$

Pick up：分母から　なし

分子から　$x=-1$（３重解)[←$(\ \ )^3$の解に注意！]

ジグザグ：起点　$x=0$　のとき　$y''=4>0$





※２重解(偶数個の重解)の場合は，Pick up しない。
３重解(奇数個の重解)の場合は，１個だけ Pick up する。
とした方が，実際は簡便である。

③両端の極限（本来は最初に調べます）

$\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1} = 1$

[※この結果は，$y=1$が漸近線であることを意味する]

④増減・凹凸表

まずは，3行目までを完成させましょう。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y''		$-$		$+$	
y					

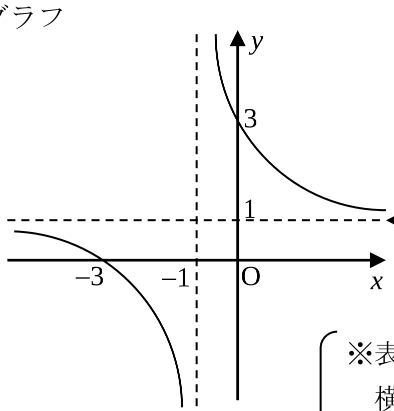
※１行目の Pick up した値が
分子から得られた場合は，0を記入し
分母から得られた場合は，斜線(／)を記入します。

それでは，表を完成させましょう。

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$+\infty$
y'	／	$-$	／	$-$	／
y''	／	$-$	／	$+$	／
y	1				1

※分母の値が 0 になるときは，縦の破線を記入
　グラフでは漸近線(今回は $x=-1$)として表す

⑤グラフ



③両端の極限が値(収束)の場合は
　横向きの漸近線となります
　(今回は $y=1$)

※表の見方
　横の漸近線 $y=1$ から上に凸の右側の
　カーブを描きながら下がり続け
　縦の漸近線 $x=-1$ に近づきます
　縦の漸近線 $x=-1$ から下に凸の左側の
　カーブを描きながら下がり続け
　横の漸近線 $y=1$ に近づきます

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【注意事項のまとめ】

□　Pick up する点は，分子だけでなく，分母からも探す。

□　２重解(偶数個の重解)のときは，pick up しない。
　　３重解(奇数個の重解)のときは，１個だけ pick up する。

□　分子から pick up した場合は，２(３)行目には，0 を記入し，
　　分母から pick up した場合は，２(３)行目には，／を記入する。

□　両端の極限が値(収束)の場合は，横向きの漸近線になる。

□　４行目において，分母が 0 になるときは，縦向きの漸近線になる。

□　虚数解は，実数ではないので，pick up の対象とはならない

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2.4　例題

例題　関数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べてグラフを描け。

［解答］①両端の極限　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\pm\infty}=\pm 0$ （複号同順）

※複号同順とは，上のときは上の，下のときは下の符号を読みとるという意味です。
今回は，$x\to+\infty$ のときは　極限値は $+0$　[上側]
$x\to-\infty$ のときは　極限値は -0　[下側]

②導関数と第２次導関数

$$y'=\frac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Pick up：分子から　$1-x^2=0$　⇒　$x^2=1$　$\therefore x=\pm1$ [○]
分母から　$x^2+1=0$　⇒　$x^2=-1$　$\therefore x=\pm i$ [×]

※虚数解の場合は，実数ではない(グラフ上に表現されない)ので，pick up の対象外となります。
[前頁の注意事項のまとめにも記入しておきました]

$$y''=\frac{-2x\times(x^2+1)^{\cancel{2}}-(1-x^2)\times\{2\cancel{(x^2+1)}\times 2x\}}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}}=\frac{-2x\times(x^2+1)-(1-x^2)\times 4x}{(x^2+1)^3}$$

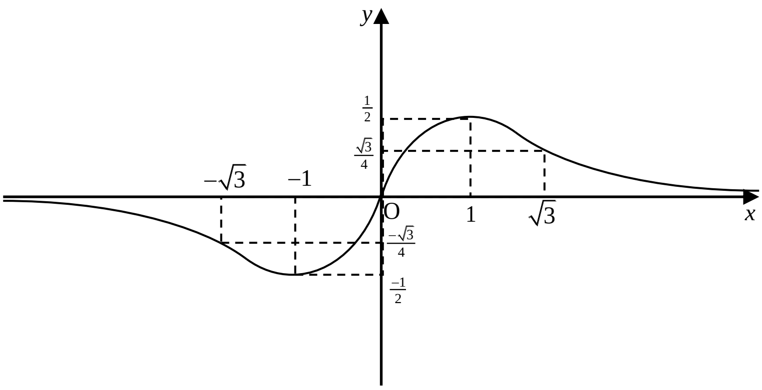
$$=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Pick up：分子から　$x=0,\ \pm\sqrt{3}$
分母から　なし

③増減・凹凸表

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$+\infty$
y'	／	$-$			0	$+$			0	$-$			／
y''	／	$-$	0	$+$			0	$-$			0	$+$	／
y	-0	↘	$\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ 変曲点	↘	$\dfrac{-1}{2}$ 極小	↗	0 変曲点	↗	$\dfrac{1}{2}$ 極大	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 変曲点	↘	$+0$

④グラフ



問 7.5　関数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べて

グラフを描け。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【課題の解答】

１） $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2+3}=+0$

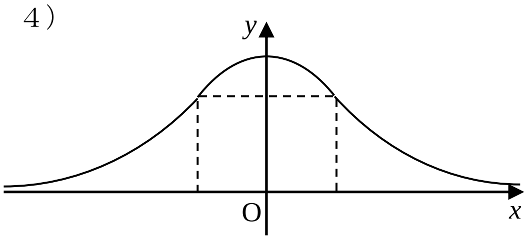
２） $y'=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$　（Pick up：分子から　$x=0$　／　分母から　なし[虚数解]）

$y''=\dfrac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$　（Pick up：分子から　$x=\pm1$　／　分母から　なし [虚数解]）

３） $x=0$ のとき　極大値　$y=\dfrac{1}{3}$

変曲点　$\left(\pm1,\ \dfrac{1}{4}\right)$

４）



（必要な数値等は記入すること！）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝