§２　いろいろな関数のグラフ

2.1　増減・凹凸表

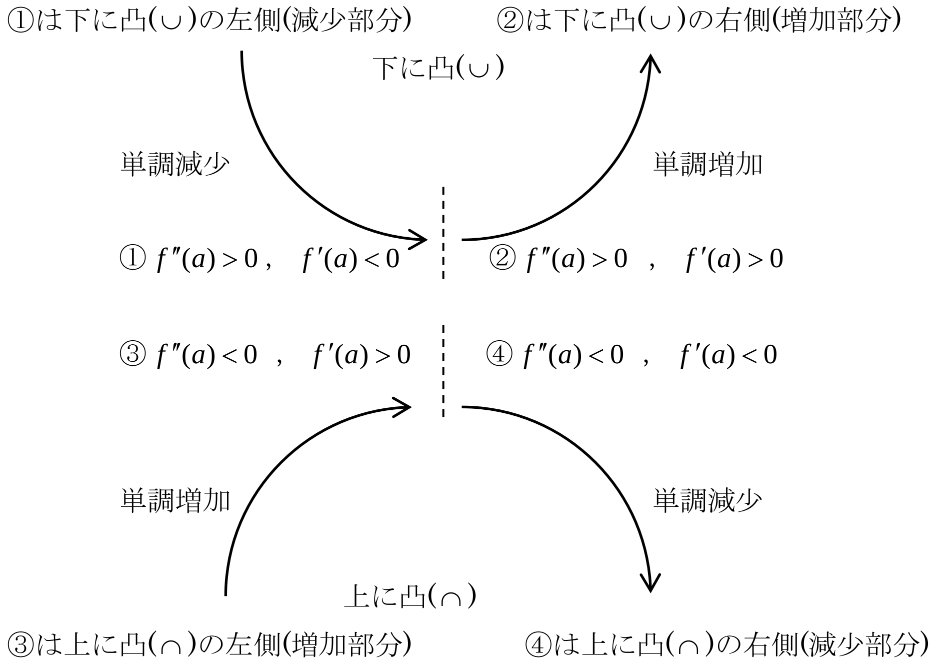
増減・凹凸表とは？

前回は，増減表と凹凸表を別々に作りましたが
今回は，増減表と凹凸表を一つにまとめた**増減・凹凸表**を作成します。

これにあわせて，新しい記号を導入します。

［記号］① $f''(a)>0$ ，　$f'(a)<0$　for　$a\in I$
　　$\Leftrightarrow$　区間 I において，下に凸で単調減少（　）
② $f''(a)>0$ ，　$f'(a)>0$　for　$a\in I$
　　$\Leftrightarrow$　区間 I において，下に凸で単調増加（　）
③ $f''(a)<0$ ，　$f'(a)>0$　for　$a\in I$
　　$\Leftrightarrow$　区間 I において，上に凸で単調増加（　）
④ $f''(a)<0$ ，　$f'(a)<0$　for　$a\in I$
　　$\Leftrightarrow$　区間 I において，上に凸で単調減少（　）

【参照】



2.2　例題

例題　関数　$y = xe^{-x}$　の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べてグラフを描け。

［解法］

１）両端の極限を調べる。

[※特に範囲指定がないときは 極限　$\lim_{x \to \pm\infty} y$　を調べる]

２）導関数と第２次導関数を求める。

[※必要に応じて因数分解する、①pick up と②ジグザグの作業を行う]

３）両端の内容[今回の範囲は$-\infty < x < +\infty$]を含めた増減・凹凸表を作成する。

４）増減・凹凸表に基づき，グラフの概形を描く。

[必要に応じて，y 切片($x = 0$)を求める。]

［解答］

１）両端の極限を調べる。

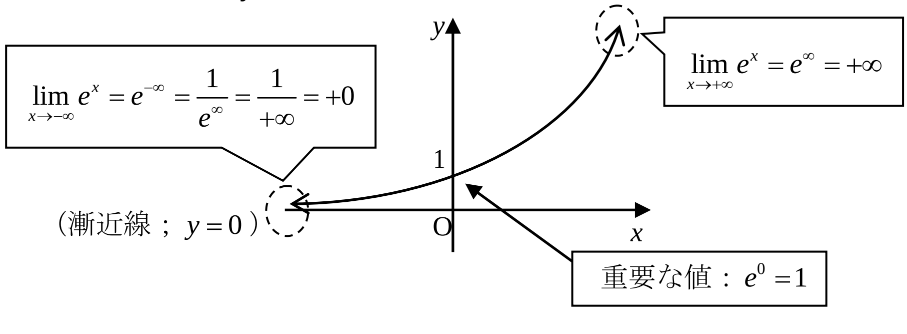
[左端]　$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = -\infty \times e^{+\infty} = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

[右端]　× $\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = +\infty \times e^{-\infty} = +\infty \times (+0)$　[直接計算は不定形]

○ $\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \underline{\underline{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = +0$

↑[※(分数の形にして)ロピタルの定理を適用]

【参考】指数関数　$y = e^x$



２）導関数と第２次導関数を求める

$y' = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$　→　Pick up：$x = 1$

$y'' = (-1) \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) = (x - 2)e^{-x}$　→　Pick up：$x = 2$

※指数関数は，**正値関数**なので，Pick up する(0 になる点)は存在しない。
尚，**正値関数**とは，0 及び負にならない(x 軸上と x 軸の下側にグラフが存在しない)関数のことである。

3）増減・凹凸表を作成する。[※増減・凹凸表は４行からなります]

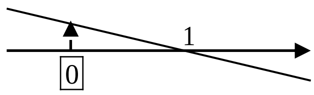
[手順１]１行目に,「両端」と「導関数及び第２次導関数から pick up した点」を記入する。

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$

[手順２]２行目の両端には「／」を記入する。

中央部には，導関数から得られる内容を記入する。

【参考】起点：$x=0$ のとき　$y'=1\times e^{0}=1\times 1=1>0$

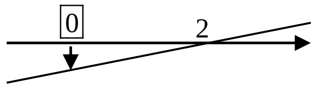


x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			

[手順３]３行目の両端には「／」を記入する。

中央部には，第２次導関数から得られる内容を記入する。

【参考】起点：$x=0$ のとき　$y'=-2\times e^{0}=-2\times 1=-2<0$



x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			
y''		$-$			0	$+$	

[手順４]４行目に、今回の新しい記号を記入する。

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
y'		＋(↗)	0	−(↘)			
y''		−(∩)			0	＋(∪)	
y							

[手順５]４行目に　「両端の極限内容」,「pick up　した点の値」

「極大と極小」,「変曲点」の内容を記入して完成です。

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			
y''		$-$			0	$+$	
y	$-\infty$		e^{-1} 極大		$2e^{-2}$ 変曲点		$+0$

４）グラフを描く。

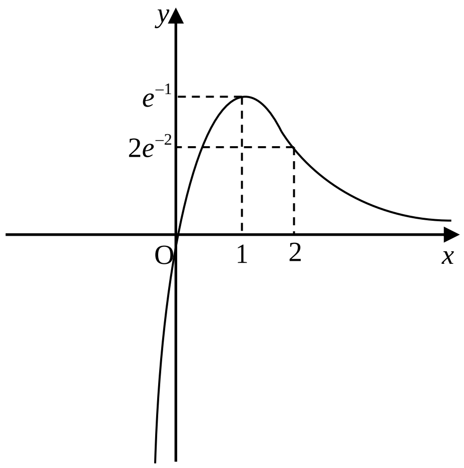
増減・凹凸表から読み取れるイメージ図

海底深く$(-\infty)$から上昇してきて点$(1,\ e^{-1})$ において山頂となり，

点$(2,\ e^{-2})$まで，上に凸のグラフを形成しながら，降りていきます。

その後，下に凸のグラフの左側の形をとりながら

海面へ滑空(漸近線：$y=0$)していきます。



【参考】

①y切片：$y=0\times e^{0}=0\times 1=0$

②近似値$[e \fallingdotseq 3]$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\fallingdotseq\frac{1}{3}\left(=\frac{3}{9}\right)$$

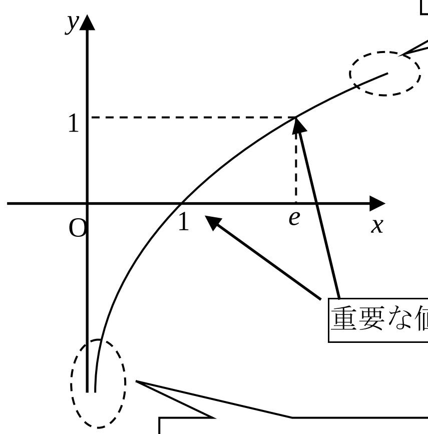
$$2e^{-2}=\frac{2}{e^{2}}\fallingdotseq\frac{2}{9}$$

問 7.4　関数　$y=x\log x$　（$x>0$）の増減，凹凸，極値，変曲点及び両端の極限等を調べてグラフを描け。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【参考】対数関数　$y=\log x$

$\lim_{x\to+\infty}\log x=\log(+\infty)=+\infty$



重要な性質　①$\log P+\log Q=\log PQ$

②$\log P-\log Q=\log\dfrac{P}{Q}$

③$\log P^{k}=k\log P$

重要な値　①$\log 1=0$　②$\log e=1$

$\lim_{x\to+0}\log x=\log(+0)=-\infty$

[※ $\lim_{x\to+0}x\log x=(+0)\times(-\infty)$　は不定形]

※注意事項（真数は正）

y軸の左側にはグラフは存在しない

つまり，定義域は　$x>0$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝