1.4　凹凸表

凹凸表とは？

まずは，復習から。

２次関数　$y = Ax^2 + Bx + C$ ［一般形］は

$y = A(x-p)^2 + q$ ［標準形］

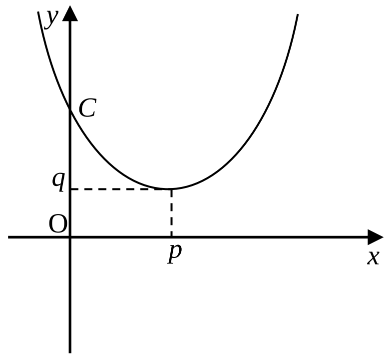
に書き直すことができ，２次関数を表すグラフは，

y 切片が $y = C$，頂点が $(p,\ q)$ で，

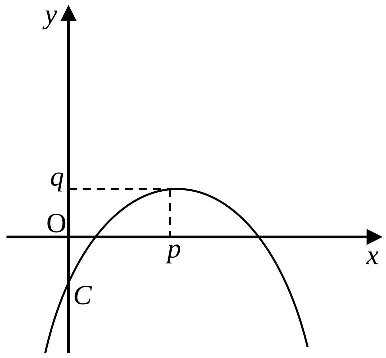
ｉ）$A > 0$ のときは　「下に凸」の放物線である。
ⅱ）$A < 0$ のときは　「上に凸」の放物線である。

※本日の重要ポイント

ｉ）$A > 0$ のとき



ⅱ）$A < 0$ のとき



ここで，新しい記号(表記)を導入します。

［記号］	ｉ）下に凸	（∪）
	ⅱ）上に凸	（∩）

【復習】	ｉ）単調増加	（↗）
	ⅱ）単調減少	（↘）

導関数の情報に基づき，単調増加（↗）と単調減少（↘）を

組込んだ表［**増減表**］を作成しました。

今回は，第２次導関数に基づき，下に凸（∪）と上に凸（∩）を

組み込んだ表［**凹凸表**］を作成します。

1.5　第 2 次導関数と凹凸の関係

第 2 次導関数と凹凸の関係は？

まずは，復習から

［導関数と増減の関係］
ｉ）$f'(a)>0$ for $a\in I$ $\Leftrightarrow$ 区間 I において　単調増加（↗）
ⅱ）$f'(a)<0$ for $a\in I$ $\Leftrightarrow$ 区間 I において　単調減少（↘）

今回は，次の性質が成り立ちます。

［第２次導関数と凹凸の関係］
ｉ）$f''(a)>0$ for $a\in I$ $\Leftrightarrow$ 区間 I において　下に凸（∪）
ⅱ）$f''(a)<0$ for $a\in I$ $\Leftrightarrow$ 区間 I において　上に凸（∩）

説明）関数 $f(x)$ は，$x=a$ のまわりで，次の様に 2 次近似できる。

$$\begin{aligned} f(x) &\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2 \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x^2-2ax+a^2)/2 \\ &= Ax^2+Bx+C \end{aligned}$$

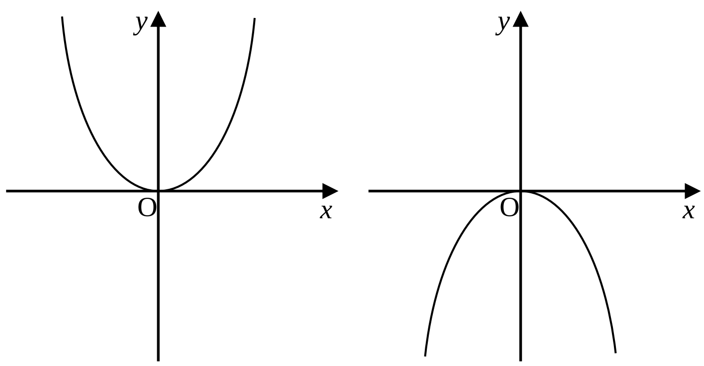
但し $\begin{cases} \boxed{A=f''(a)/2} & \leftarrow \boxed{\text{重要}} \\ B=f'(a)-af''(a) \\ C=f(a)-af'(a)+a^2f''(a)/2 \end{cases}$

よって，１頁の「本日の重要ポイント」とあわせると
上の結果を得ることができます。

ｉ）$f''(a)=2A>0$ $\Leftrightarrow$ 下に凸（∪）
ⅱ）$f''(a)=2A<0$ $\Leftrightarrow$ 上に凸（∩）

※第２次導関数 $f''(x)$ は，曲線の曲り方を示すものです。
その曲り方は，基本的な放物線 $y=Ax^2$ に由来します。

ｉ）$A>0$ [下に凸]　　ⅱ）$A<0$ [上に凸]



1.6　変曲点

変曲点とは？

復習から

○単調増加（↗）から単調減少（↘）に変わる所を**極大**といい，
　単調減少（↘）から単調増加（↗）に変わる所を**極小**という。

○極大(極小)となる所での関数の値を，**極大値(極小値)**といい，
　極大値と極小値をあわせて，単に**極値**という。
　このとき，次の性質が成り立つ。

［極値条件］　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる　$\Rightarrow$　$f'(a)=0$

今回は
「下に凸（∪）」から「上に凸（∩）」に
　　　又は　「上に凸（∩）」から「下に凸（∪）」に
変わる所を，**変曲点**という。
また，次の性質が成り立つ。

［変曲点］　$f(x)$ が $x=a$ で変曲点となる　$\Rightarrow$　$f''(a)=0$

1.7　例題

今回，新しく組み込まれた内容

例題　関数　$y=x^3-3x$　の増減，凹凸，極値及び変曲点を調べてグラフを描け。

［解法］１）導関数 y' と第２次導関数 y'' を求める。必要に応じて因数分解を行う。
　　　２）導関数 y' に基づき，「増減表」を作成する。
　　　　　① $y'=0$ となる点を Pick up する[1行目]
　　　　　②ジグザグ表を作成する[2行目]
　　　　　③単調増加，単調減少，極大，極小などの情報を
　　　　　　3行目に書き込む
　　　３）第２次導関数 y'' に基づき，「凹凸表」を作成する。
　　　　　作成方法は，「増減表」と同じ。

①$y''=0$となる点を Pick up する[1 行目]

②ジグザグ表を作成する[2 行目]

③下に凸，上に凸，変曲点などの情報を 3 行目に書き込む

4）「増減表」と「凹凸表」をあわせた内容をグラフとして表す。

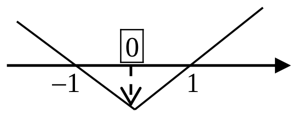
［解答］1） $y=x^3-3x$　より

$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$y''=6x$ [※第 2 次導関数は因数分解前の $y'=3x^2-3$ から導く]

2）Pick up[$y'=0$]： $x=-1,\ 1$

ジグザグ：起点 $x=0$ のとき　$y'=-3<0$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2 極大	↘	-2 極小	↗

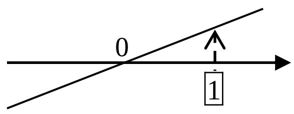
(←2 行目は y')

$x=-1$ のとき　$y=-1+3=2$

$x=1$ のとき　$y=1-3=-2$

3）Pick up[$y''=0$]： $x=0$

ジグザグ：起点 $x=1$ のとき　$y''=6>0$

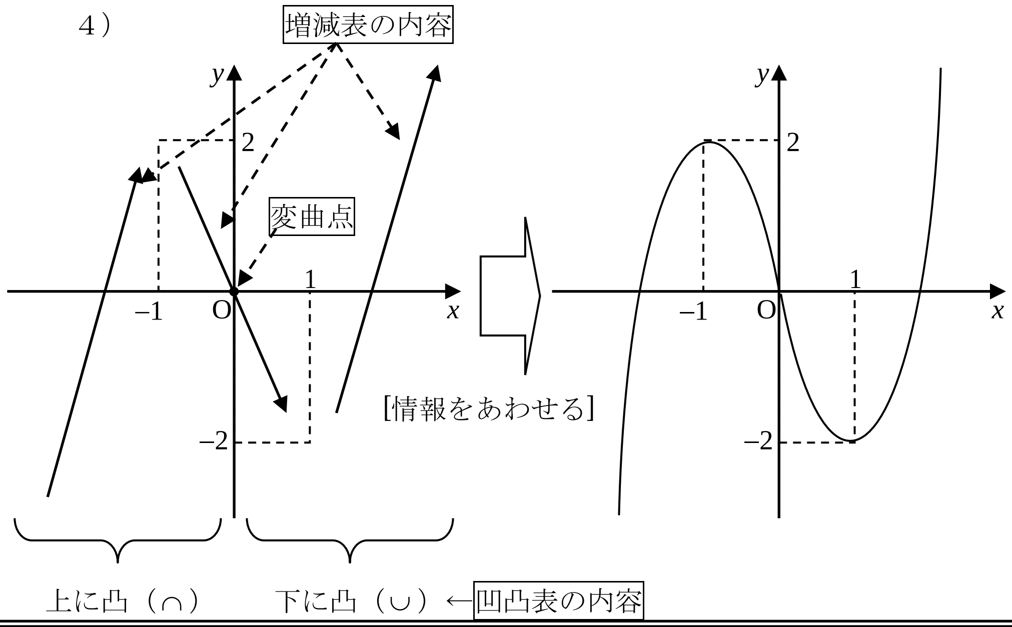


x	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	∩	0 変曲点	∪

(←2 行目は y'')

$x=0$ のとき　$y=0-0=0$

4）



問 7.3　関数 $y=x^4-6x^2+5$ の増減，凹凸，極値及び変曲点を調べてグラフを描け。