§４　まとめ

4.1　積分公式

○今までの積分公式をまとめておきます。

［基本公式］

$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log x$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

［実践的な積分］

$f(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}F(ax+b)$
$(ax+b)^n$	$\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a}\log(ax+b)$
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\dfrac{1}{a}\cot(ax+b)$
$\dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\dfrac{1}{a}\tan(ax+b)$

［部分積分法］　$\int f(x)g(x)\ dx = \int f(x)G'(x)\ dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\ dx$

【“仕込み”の優劣順位　】

［$g(x)$ 側］　e^{ax}　＞＞　$\sin ax,\ \cos ax$　＞＞　x^n　＞＞　$\log x$　［$f(x)$ 側］

［置換積分法］　$u = g(x) \cdots$①　とおくと

$\dfrac{du}{dx} = g'(x)$　より　$dx = \dfrac{du}{g'(x)} \cdots$②

①と②より　$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)g'(x)\times\dfrac{du}{g'(x)} = \int f(u)\ du$

［知っていると簡便な積分公式］ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log\{f(x)\} + C$

4.2　三角関数の公式

○積分に用いた三角関数の公式をまとめておきます。

［基本公式］ (1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$　　(3) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

［基本公式からの導出公式］

(4) $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$　　(5) $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

［積を和に直す公式］

(6) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$

(7) $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$

(8) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$

(9) $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$

［積を和に直す公式からの導出公式： $\beta = \alpha$ の場合］

(10) $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

(11) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

(12) $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

例題はありません。本日は積分計算をご堪能あれ！

4.3　演習

問 9.9　次の不定積分を求めよ。

(01) $\int \sin 2x\, dx$　(02) $\int \sin^2 x\, dx$　(03) $\int \sin x \cos x\, dx$　(04) $\int \sin 2x \cos x\, dx$

(05) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$　(06) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$　(07) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$　(08) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

(09) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$　(10) $\int \tan x\, dx$　(11) $\int \tan^2 x\, dx$　(12) $\int x \cos 2x\, dx$

(13) $\int x \cos(x^2+1)\, dx$　(14) $\int e^{-x} \cos 2x\, dx$　(15) $\int \cos 3x \cos 2x\, dx$

(16) $\int (2x+1)^3\, dx$　(17) $\int x(x^2+1)^3\, dx$　(18) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\, dx$　(19) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

(20) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$　(21) $\int (2x+1)(x^2+x+1)\, dx$　(22) $\int (2x+1)(x^2+x+1)^4\, dx$

(23) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$　(24) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}\, dx$　(25) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}\, dx$　(26) $\int \frac{1}{2x+1}\, dx$

(27) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$　(28) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$　(29) $\int \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

(30) $\int (e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})\, dx$　(31) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\, dx$　(32) $\int (e^x+e^{-x})^2\, dx$

(33) $\int xe^{2x}\, dx$　(34) $\int xe^{x^2}\, dx$　(35) $\int x^2 e^x\, dx$　(36) $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

(37) $\int \log x\, dx$　(38) $\int x \log x\, dx$　(39) $\int \frac{\log x}{x}\, dx$

課題　次の不定積分を求めよ。

(40) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$　(41) $\int \left(2x+1+\frac{1}{2x+1}\right) dx$　(42) $\int \frac{1}{(2x+1)^3}\, dx$

(43) $\int e^{2x+1}\, dx$　(44) $\int \frac{1}{\cos^2(2x+1)}\, dx$　(45) $\int \cos^2 x\, dx$　(46) $\int \cos 2x \sin x\, dx$

(47) $\int \cos^2 x \sin x\, dx$　(48) $\int x \sin 2x\, dx$　(49) $\int x^2 \log x\, dx$　(50) $\int \frac{(\log x)^2}{x}\, dx$

＝＝＝

【研究】不定積分 $\int \sin x \cos x \, dx$ を求めよ。

(1) 三角関数の積を和に直す公式(特殊版)を用いると

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1$$

(2) 置換積分法で解くこともできます。

$u = \sin x \cdots$① とおくと $\dfrac{du}{dx} = \cos x$ $\therefore dx = \dfrac{du}{\cos x} \cdots$②

①と②より

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \cancel{\cos x} \times \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int u \, du = \frac{1}{2}u^2 + C_2 = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_2$$

(1)の解答と異なってますね。

実は，[倍角公式]から $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ が成り立ちます。

つまり，(1)の答えは，次のように変形できます。

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) + C_1 = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_2 \quad \left(\text{但し} \quad C_2 = C_1 - \frac{1}{4}\right)$$

[※定数の塊は，新しい定数として置き換えることができます]

(3) 部分積分法を応用的に使用できます。

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \sin^2 x - \int \cos x \sin x \, dx$$

よって $2\int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x + C_3$

$$\therefore \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_2 \quad \left(\text{但し} \quad C_2 = \frac{C_3}{2}\right)$$

＝＝＝

課題 (40) $\frac{1}{2}\log(x^2 + 2x + 3) + C$ (41) $x^2 + x + \frac{1}{2}\log(2x+1) + C$ (42) $\dfrac{-1}{4(2x+1)^2} + C$

(43) $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$ (44) $\frac{1}{2}\tan(2x+1) + C$ (45) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(46) $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$ (47) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ (48) $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(49) $\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + C$ (50) $\frac{1}{3}(\log x)^3 + C$