§３　置換積分法

3.1　置換積分法

微分記号の復習から

関数 $y = f(x)$ の微分を表す記号は，次の２通りがあります。

［ニュートン］　y',　$f'(x)$　　［ライプニッツ］　$\dfrac{dy}{dx}$

つまり　$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}(= y') = f'(x)$

特に，ライプニッツの記号は

　左辺の文字 y [分子に記載]を，右辺の文字 x [分母に記載]で微分する

ということも教えてくれます。

形式的に，分数の様な取り扱いができることも魅力です。

置換積分法とは？

次の積分方法を**置換積分法**といいます。

１） $u = g(x) \cdots$①　とおく。[※今回は y が u で表記]

２）①を微分する

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \quad \Rightarrow \quad du = g'(x)\ dx \qquad \therefore dx = \frac{du}{g'(x)} \cdots ②$$

３）①，②より，次の関係式が成り立つ。

［置換積分法］

$$\int f(\boxed{g(x)})g'(x)\ dx = \int f(\boxed{u})\ \cancel{g'(x)} \times \frac{du}{\cancel{g'(x)}} = \int f(u)\ du$$

①　②

3.2　例題

例題　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2+x+1)^3(2x+1)\ dx$

$$\left(\begin{aligned}&\int (\boxed{x^2+x+1})^3(2x+1)\ dx\\ &=\int \boxed{u}^3(2x+1)\ dx\\ &=\int u^3(2x+1)\times\frac{du}{(2x+1)}\end{aligned}\right)$$

［解答］ $u=x^2+x+1\cdots$① とおくと

$$\frac{du}{dx}=2x+1 \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{du}{2x+1}\cdots②$$

よって，①と②より

$$\int (x^2+x+1)^3(2x+1)\ dx=\int u^3\cancel{(2x+1)}\ \frac{du}{\cancel{(2x+1)}}$$

$$=\int u^3\ du$$

※このとき，x がすべて u に「置き換え」られていること。
もし，文字 x が残る場合は，①のセッティングが間違え！
①からやり直してください。

$$=\frac{1}{4}\boxed{u}^4+C=\frac{1}{4}(\boxed{x^2+x+1})^4+C \qquad \text{(①より)}$$

(2) $\int \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^3}\ dx$

［解答］ $u=x^2+2x+3\cdots$① とおくと

$$\frac{du}{dx}=2x+2 \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{du}{2x+2}=\frac{du}{2(x+1)}\cdots②$$

よって，①と②より

$$(\text{与式})=\int\frac{\cancel{(x+1)}}{u^3}\times\frac{du}{2\cancel{(x+1)}}=\int\frac{1}{2u^3}du$$

※(1)との違いがわかりますか？
全てが約分されたわけではありませんが，
x の式はなくなりましたので OK です。

$$=\frac{1}{2}\int u^{-3}\ du=-\frac{1}{4}u^{-2}+C=\frac{-1}{4(x^2+2x+3)^2}+C$$

【注意】(与式)とは ”与えられた式” のことです。途中に文章が入り，
前段の問題式などを再び記載するような時に使用します。

問 9.8　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$　　(2) $\int \frac{\log x}{x}\ dx$

(3) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\ dx$　　(4) $\int \sin x \cos^5 x\ dx$

(5) $\int e^x(1+e^x)^4\ dx$

＝＝＝

【研究：問題の作成方法】

一般的な「置換積分法」は

$u = g(x) \cdots$①　とおくと　$\frac{du}{dx} = g'(x)$　　$\therefore\ dx = \frac{du}{g'(x)} \cdots$②

①，②より

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)\cancel{g'(x)} \times \frac{du}{\cancel{g'(x)}} = \int f(u)\ du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

それでは，関数 $f(x)$ をもう少し具体的にしてみると

(1) $f(x) = x^n$　　$\int \{g(x)\}^n g'(x)\ dx = \int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C = \frac{1}{n+1}\{g(x)\}^{n+1} + C$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$　　$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \log u + C = \log\{g(x)\} + C$

(3) $f(x) = e^x$　　$\int g'(x)\ e^{g(x)}\ dx = \int e^u\ du = e^u + C = e^{g(x)} + C$

(4) $f(x) = \sin x$　　$\int g'(x)\ \sin\{g(x)\}\ dx = \int \sin u\ du = -\cos u + C = -\cos\{g(x)\} + C$

(5) $f(x) = \cos x$　　$\int g'(x)\ \cos\{g(x)\}\ dx = \int \cos u\ du = \sin u + C = \sin\{g(x)\} + C$

例えば，(1)において，$g(x) = x^2+1\ \ (n=1/2)$，$g(x) = \log x\ \ (n=1)$

$g(x) = \cos x\ \ (n=5)$，$g(x) = 1+e^x\ \ (n=4)$　$\cdots$　とすると

順に　$\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx$，$\int \frac{\log x}{x}\ dx$，$-\int \sin x\cos^5 x\ dx$，$\int e^x(1+e^x)^4\ dx$，$\cdots$

のような問題が作れます。

皆さんは，(1)～(5)のどのタイプに，$g(x)$ として何を採用しますか？

＝＝＝