2.4　部分積分法（応用）

応用とは？

○前回は，Type(A)と Type(B)と分けましたが，
　特に区別する必要性はありません。
○実は，”仕込み”を行う関数の優劣があります。
“仕込み”を行う関数を $g(x)$ とすると，次の様な関係になります。

$g(x)$ 側　　　　　　　　　　　　　　　　$f(x)$ 側

$$\underbrace{e^{ax} \quad >> \quad \sin ax,\ \cos ax \quad >>}_{\text{前回の Type(A)}} \underbrace{x^n \quad >> \quad \log x}_{\text{前回の Type(B)}}$$

※上記の関係で，左側にある関数に“仕込み”を行います

○このとき，一般的な公式は Type(A)にまとめることができます。

［部分積分法］
$$\int f(x)g(x)\ dx = \int f(x)G'(x)\ dx$$
$$= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\ dx$$

【注意】 $\int x^n \log x\ dx$ の場合

１） $\log x$ の積分は「基本公式」ではありません！（※前回の【研究】参照）
２） このため $\log x$ は“仕込み”を行わない関数 $f(x)$ 側の最も右端です。

３） $\int x^n \log x\ dx$ の場合は

［誤］　$f(x) = x^n,\quad g(x) = \log x$　　ではなく
［正］　$f(x) = \log x,\quad g(x) = x^n$　　である

ことを確認してください。（※単純な表記に惑わされない！）

$$\int x^n \log x\ dx = \int \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' \log x\ dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x - \int \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} \times \frac{1}{x}\right)\ dx$$

○今回は，$n=2$ のときを取り扱います。

(1) $\int xe^{ax}\ dx$	(5) $\int x^2e^{ax}\ dx$
(2) $\int x\sin ax\ dx$	(6) $\int x^2\sin ax\ dx$
(3) $\int x\cos ax\ dx$	(7) $\int x^2\cos ax\ dx$
(4) $\int x\log x\ dx$	(8) $\int x^2\log x\ dx$

※(1)～(4)と(8)は，前回の基本的な内容です。

※今回は，応用として，(5)～(7)を練習します。

例題　不定積分 $\int x^2\sin 3x\ dx$ を求めよ。

［解法］部分積分法を２回使う。

１回目：前回は　$(x)'=1$　でしたが，

今回は　$(x^2)'=2x$　のため，文字 x が残ります。

１回目が終了した時点で、前回の内容となります。

２回目：$(x)'=1$　となり，基本公式が適用可能になります。

［解答］

$$\left.\begin{aligned}\int x^2\sin 3x\ dx &= \int x^2\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'dx\\ &= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3x\ dx\end{aligned}\right\}\text{1回目}$$

$$\left.\begin{aligned}&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'dx\\ &= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3x\ dx\right\}\end{aligned}\right\}\text{2回目}$$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\right\}+C\\ &= -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+C\end{aligned}$$

問 9.6　不定積分 $\int x^2\cos 2x\ dx$ を求めよ。

＝＝

【研究】 x^n と $\log x$ の積に関する積分

１） 特殊な場合($n=0$)

$$\int \log x\ dx = \int (x)' \log x\ dx = x\log x - \int \left(x \times \frac{1}{x} \right) dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$$

２） 基本の場合($n=1$)

$$\int x\log x\ dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 \right)' \log x\ dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

３） 一般の場合

$$\int x^n \log x\ dx = \int \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' \log x\ dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \int \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \times \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{n+1} \int x^n\ dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C$$

のように，１回の部分積分法で不定積分を求めることができます。
今回のように，２回の部分積分法で求める問題は，次の形になります。

$\boxed{\text{問題}}$ 不定積分 $\int x\,(\log x)^2\ dx$ を求めよ。

［注意］ $\{(\log x)^2\}' = 2\log x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\log x}{x}$

［解答］
$$\int x\,(\log x)^2\ dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 \right)' (\log x)^2\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 (\log x)^2 - \int \left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{2\log x}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 (\log x)^2 - \int x\log x\ dx$$

…（略）…

$$= \frac{1}{2}x^2 (\log x)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 \right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 (\log x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \log x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

＝＝

2.5　部分積分法(応用)

応用とは？

部分積分法を適用した特殊な解法で，次の不定積分を求めます。

(1) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$　　　(2) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

例題　不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ を求めよ。

［注意］“仕込み”の優劣表より　$f(x)=\sin bx,\ \cos bx$　　$g(x)=e^{ax}$

［解法］部分積分法を２回適用する。

［解答］

$$\boxed{\int e^{2x}\sin 3x\,dx}=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\sin 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

第１回

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\cos 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx\right\}$$

第２回

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x-\frac{9}{4}\boxed{\int e^{2x}\sin 3x dx}$$

（※左辺[最初の問題]に移項する）

※同じ形になる

よって，次式が導ける

$$\left[\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x+c\right]$$ (※省略可能)

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x+c$$

（※右辺に積分が無くなるので
形式的に積分定数を追記する）

$$\therefore\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x+C\quad\left(但し\quad C=\frac{4}{13}c\right)$$

問 9.7　不定積分 $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ を求めよ。