第７章　微分Ⅱ

§１　第２次導関数

1.1　微分公式（復習）

微分公式一覧です

［積の微分］　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

［商の微分］　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

微分公式[基本]	微分公式[合成]	備　　考
(1)　$\{x^n\}' = n\,x^{n-1}$	$\{u^n\}' = n\,u^{n-1} \times u'$ （※ $n=-1$ と $n=\dfrac{1}{2}$ は別公式として覚える）	(1-1)　$\left\{\dfrac{1}{u}\right\}' = -\dfrac{u'}{u^2}$ (1-2)　$\{\sqrt{u}\}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
(2)　$\{\log x\}' = \dfrac{1}{x}$	$\{\log u\}' = \dfrac{u'}{u}$	(2-1)　$\{\log\lvert x\rvert\}' = \dfrac{1}{x}$ (2-2)　$\{\log_a x\}' = \dfrac{1}{x\log a}$
(3)　$\{e^x\}' = e^x$	$\{e^u\}' = u'e^u$	(3-1)　$\{a^x\}' = a^x\log a$
(4)　$\{\sin x\}' = \cos x$	$\{\sin u\}' = u'\cos u$	
(5)　$\{\cos x\}' = -\sin x$	$\{\cos u\}' = -u'\sin u$	
(6)　$\{\tan x\}' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\{\tan u\}' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	(6-1)　$\{\cot x\}' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
(7)　$\{\mathrm{Sin}^{-1}x\}' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\{\mathrm{Sin}^{-1}u\}' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	(7-1)　$\{\mathrm{Cos}^{-1}x\}' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
(8)　$\{\mathrm{Tan}^{-1}x\}' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$\{\mathrm{Tan}^{-1}u\}' = \dfrac{u'}{u^2+1}$	

1.2　第 2 次導関数

第２次導関数とは？

関数 $f(x)$ を微分して得られる関数を
関数 $f(x)$ の**導関数**といい，記号 $f'(x)$ と表す。

更に，導関数 $f'(x)$ を微分して得られる関数を
関数 $f(x)$ の**第 2 次導関数**といい，記号 $f''(x)$ と表す。

例）関数　$f(x)=x^3+x^2+x+1$

微分

導関数　$f'(x)=3x^2+2x+1$

微分

第 2 次導関数　$f''(x)=6x+2$

[微分記号]　ニュートンの記法　y'，$f'(x)$

ライプニッツの記法　$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$

（注意）微分記号のダッシュ[’]に相当する部分が $\dfrac{d}{dx}$ になります。

[読み：ディ 2 乗ワイ　ディエックス 2 乗]

[第 2 次導関数の記号]　y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

（注意）第 2 次導関数の記号ツゥダッシュ[”]に

相当する部分は $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2=\dfrac{d^2}{dx^2}$ [ディ 2 乗　ディエックス 2 乗]

＝＝＝

【ちょっと一言】　ライプニッツの記法を用いた第２次導関数は

［正］$\dfrac{d^2y}{dx^2}$　です。くれぐれも　［誤］$\dfrac{dy^2}{dx^2}$　としないでください。

微分記号として $y'=\dfrac{d}{dx}y=\dfrac{dy}{dx}$　[y は分子でも、微分記号の右側でもよい]が成立。

つまり　$y''=(y')'=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$　$\left(\text{又は}\ \ y''=\dfrac{d}{dx}\dfrac{d}{dx}y=\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ が成立。

＝＝＝

例題　関数 $y=\log x+\sin 2x$ の第２次導関数を求めよ。

［解法］ $y'=\dfrac{1}{x}+2\cos 2x$　　：導関数[公式(2)&(4)： 1 頁参照]

$y''=-\dfrac{1}{x^2}-4\sin 2x$　　：第 2 次導関数[公式(1-1)1&(5)]

問 7.1　次の関数の第２次導関数を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x}$　　(2) $y=(3x-5)^4$

(3) $y=e^{x^2}$　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$

1.3　２次近似式

２次近似式とは？

関数 $f(x)$ を，２次式 $p+q(x-a)+r(x-a)^2$ で近似することを考える。
２次式で近似するので，**２次近似式**と言います。

いま， $f(x)=p+q(x-a)+r(x-a)^2+(x-a)^3E(x)$ …①　とおく。

※ $(x-a)^3E(x)$ は，与えられた関数 $y=f(x)$ と
２次近似式 $p+q(x-a)+r(x-a)^2$ との差を表す。
２次近似の係数 p, q, r は定数で，差の部分は場所により
変動するので係数 $E(x)$ は関数とする。

①に $x=a$ を代入すると　$f(a)=p$ …②　が得られる。

①の導関数は

$$f'(x)=q+2r(x-a)+\{3(x-a)^2E(x)+(x-a)^3E'(x)\}$$

$$=q+2r(x-a)+(x-a)^2\{3E(x)+(x-a)E'(x)\}$$

よって， $x=a$ を代入すると　$f'(a)=q$ …③　が得られる。

①の第２次導関数は

$$f''(x)=2r+2(x-a)\{3E(x)+(x-a)E'(x)\}+(x-a)^2\{3E(x)+(x-a)E'(x)\}'$$

よって， $x=a$ を代入すると　$f''(a)=2r$ …④　が得られる。

②～④の内容を①に代入すると

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+(x-a)^3E(x)$$

が得られる。従って，次の２次近似式の関係が成り立ちます。

［２次近似式］　関数 $f(x)$ において， $x=a$ のまわりの２次近似式は

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

※「$x=a$ のまわり」とは，「$x=a$ から少しだけ離れた区間」を意味します。離れるほど近似の精度は悪くなります。

例題　関数 $f(x)=\sin x$ において， $x=0$ のまわりの２次近似式を求めよ。

また， $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の近似値を求めよ。

［解答］ $f(x)=\sin x$ より　　$f(0)=\sin 0=0$

$f'(x)=\cos x$ より　　$f'(0)=\cos 0=1$

$f''(x)=-\sin x$ より　　$f''(0)=-\sin 0=0$

よって，求める近似式は

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad より$$

$$\sin x\fallingdotseq 0+1\times x+0\times x^2=x$$

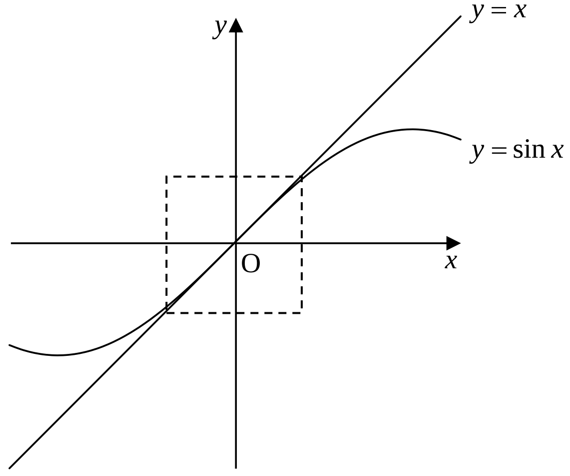
また　$\sin\dfrac{\pi}{12}\fallingdotseq\dfrac{\pi}{12}\left(\fallingdotseq\dfrac{3.14}{12}=0.26166\cdots\right)$

［復習］加法定理より

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\left(=0.25881\cdots\right)$$

［参考］原点$(x=0)$まわりでの近似状況



※ $x=0$ のまわりで　$\sin x \fallingdotseq x$　であることは

［極限公式］　$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

が成り立つことも意味しています。

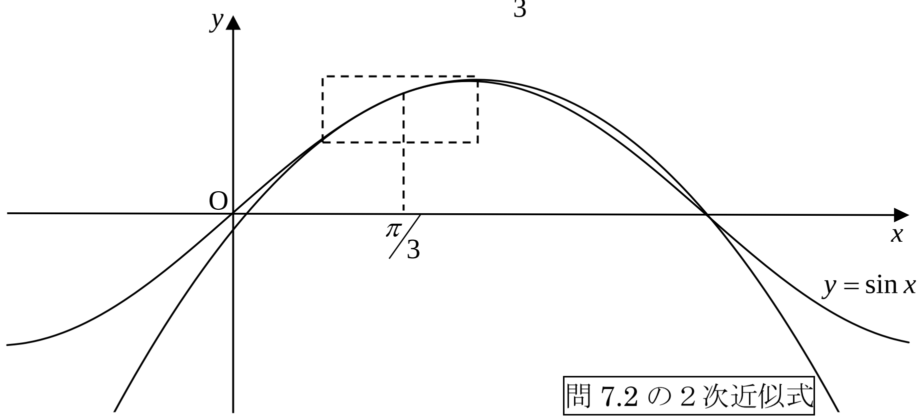
問 7.2　関数　$f(x)=\sin x$　において，$x=\dfrac{\pi}{3}$ のまわりの２次近似式を求めよ。

また，求めた近似式を用いて　$\sin\dfrac{\pi}{2}(=1)$　を計算せよ。

但し，$\pi \fallingdotseq 3$，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$　で近似せよ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

【参考】問 7.2 で求める２次近似式における　$x=\dfrac{\pi}{3}$　のまわりでの近似状況



＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝