演習　微分２_第 01 回

学年[２]年　学科[MI・AC・BC]　番号[　　　　]　氏名　[　　　　　　　　　　　　]

問 7. 1　次の関数の第２次導関数を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x}=x^{-3}+x^{\frac{1}{3}}$　　$y'=-3x^{-4}+\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$$y''=12x^{-5}-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{12}{x^5}-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

(2)　$y=(3x-5)^4$　　$y'=4(3x-5)^3\times 3=12(3x-5)^3$

$$y''=36(3x-5)^2\times 3=108(3x-5)^2$$

(3)　$y=e^{x^2}$　　$y'=2xe^{x^2}$

$$y''=2e^{x^2}+2x\times 2xe^{x^2}=(4x^2+2)e^{x^2}$$

(4)　$y=\sqrt{1-x^2}$　　$y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y''=\frac{-1\times\sqrt{1-x^2}-(-x)\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}\quad\begin{matrix}\times\sqrt{1-x^2}\\ \times\sqrt{1-x^2}\end{matrix}$$

$$=\frac{-(1-x^2)-x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3}=\frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

問 7. 2　関数 $f(x)=\sin x$ において，$x=\dfrac{\pi}{3}$ のまわりの２次近似式を求めよ。また，求めた近似式を用いて $\sin\dfrac{\pi}{2}(=1)$ を計算せよ。但し，$\pi\fallingdotseq 3$，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$ で近似せよ。

$f(x)=\sin x$　より　　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x)=\cos x$　より　　$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-\sin x$　より　　$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める近似式は

$$\sin x\fallingdotseq\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2$$

また，　$\sin\dfrac{\pi}{2}\fallingdotseq\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^2$

$$\fallingdotseq\frac{1.7}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)-\frac{1.7}{4}\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1.7}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1.7}{16}=\frac{13.6+4-1.7}{16}=\frac{15.9}{16}\fallingdotseq 1$$