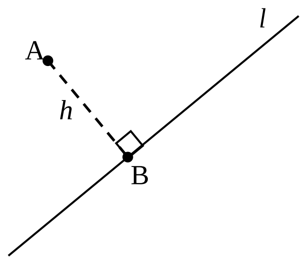
§４　発展問題

4.1　点と直線の距離

点と直線の距離とは？

点 A から直線 l 上に降ろした垂線の足を B とする。
このとき AB の長さを，点と**直線の距離**という。
（※直線上の任意の点 P に対して，線分 AP の長さが最短になる場所でもある。）



【平面座標の場合】

点 A(a_1, a_2)，点 B(b_1, b_2)，直線の方程式 $n_1x + n_2y + c = 0 \cdots$①　とおくと

直線の法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は平行であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = s\vec{n} \cdots ② \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = a_1 + sn_1 \\ b_2 = a_2 + sn_2 \end{cases}$$

点 B は直線①上の点[代入可能]だから

$$n_1(a_1 + sn_1) + n_2(a_2 + sn_2) + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad Ls + M = 0 \cdots ③ \qquad 但し \begin{cases} L = n_1^2 + n_2^2 \\ M = n_1a_1 + n_2a_2 + c \end{cases} \cdots ④$$

このとき，②，③，④より

$$h = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |s||\vec{n}| = \left|\frac{-M}{L}\right| \times \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = \frac{|n_1a_1 + n_2a_2 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

○平面座標の場合

点 A(a_1, a_2)　と　直線 $n_1x + n_2y + c = 0$　との距離

$$h = \frac{|n_1a_1 + n_2a_2 + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

○空間座標の場合[TEXT_第 04 回を参照]

点 A(a_1, a_2, a_3)　と　平面 $n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$　との距離

$$h = \frac{|n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

例題　点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 2)$ と直線 $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y+2}{3}=z+5$ との距離 h を求めよ。

［注意］前頁の公式は，平面座標の場合は直線の，空間座標の場合は平面の「法線ベクトル」を利用して導きました。

今回は「直線の方向ベクトル」を用いるので，全く別問題となります。

［解法］媒介変数 s を用いた直線表示は $\begin{cases} x=-3s+4 \\ y=3s-2 \\ z=s-5 \end{cases}$ であるから，

特別な s の値を用いて　$\mathrm{B}(-3s+4,\ 3s-2,\ s-5)$　とおける。

このとき，大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ が最小となる s の値を求める。

［解答］直線上の点 B の座標を　$(-3s+4,\ 3s-2,\ s-5)$　とする。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} -3s+4 \\ 3s-2 \\ s-5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3s+1 \\ 3s-3 \\ s-7 \end{pmatrix}$　より

$$h^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3s+1)^2+(3s-3)^2+(s-7)^2$$

「２次関数の極値問題」より，微分の零点で最小値を取るので

$$\begin{aligned}(h^2)'&=-6(-3s+1)+6(3s-3)+2(s-7)\\&=18s-6+18s-18+2s-14\\&=38s-38=0\end{aligned}\qquad \therefore s=1$$

よって，求める距離は　$h^2=(-2)^2+(0)^2+(-6)^2=4+0+36=40$

$$\therefore h=2\sqrt{10}$$

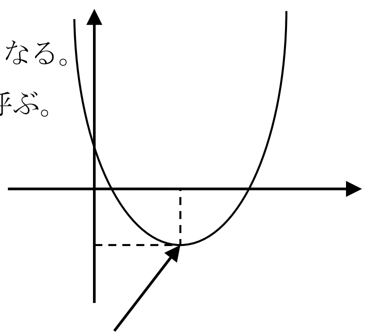
※注意：２次関数 $y=ax^2+bx+c$ （但し　$a>0$ ）は，

「 $y'=0$ を満たす点」で，必ず「極小値＝最小値」となる。

この性質を用いる問題を「２次関数の極値問題」と呼ぶ。

増減表

x	$\cdots$	$-b/2a$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小	↗



「極小値＝最小値」

（余談ですが，この性質は統計学の中でも出てきたことを覚えていますか？）

問 8. 17　点 $\mathrm{A}(4,\ 5,\ 5)$ と直線 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+4}{2}$ との距離 h を求めよ。

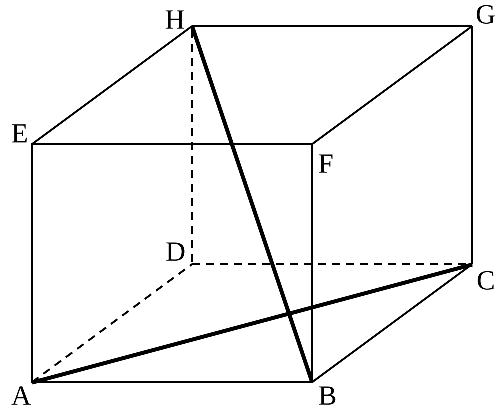
4.2　２つの直線の位置関係

２つの直線の位置関係とは？

○平面座標では，平行でない２つの直線は，
必ず交わります。

○空間座標では，平行でない２つの直線が
交わらない位置関係があります。
これを**ねじれの位置**にあると呼びます。

例）右図の直方体 ABCD-EFGH において
直線 AC と直線 BH は
「ねじれの位置」にある。



例題　次の２つの直線が，交わるように定数 a の値を定めよ。
また，交点の座標を求めよ。

直線 l_1 ： $x+4=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-3}{4}$，直線 l_2 ： $\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=z+1$

［解答］ $x+4=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-3}{4}=s$， $\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=z+1=t$　とおくと

各直線の媒介変数表示は　$\begin{cases} x=s-4 \\ y=-5s+3 \\ z=4s+3 \end{cases}$，$\begin{cases} x=2t+a \\ y=-2t+5 \cdots ① \\ z=t-1 \end{cases}$

よって，問題（２つの直線は交わる）より，次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} s-4=2t+a \\ -5s+3=-2t+5 \\ 4s+3=t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=s-2t-4 \cdots ② \\ 5s-2t=-2 \cdots ③ \\ 4s-t=-4 \cdots ④ \end{cases}$$

③－④×２より　$-3s=6$　$\therefore s=-2$

④より　$-8-t=-4$　$\therefore t=-4$

②より　$a=-2+8-4=2$

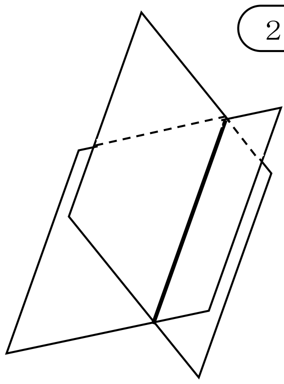
①より　$\begin{cases} x=2t+a=-8+2=-6 \\ y=-2t+5=8+5=13 \\ z=t-1=-4-1=-5 \end{cases}$　（答） $a=2$，交点 $(-6,\ 13,\ -5)$

問 8.18　次の２つの直線が，交わるように定数 a の値を定めよ。
また，交点の座標を求めよ。

直線 l_1 ： $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-1}{4}$，直線 l_2 ： $\dfrac{x-a}{4}=y-2=\dfrac{z-5}{2}$

4.3　２つの平面の交線

２つの平面の交線とは？



○平行でない２つの平面は，
　必ず交わります。
○２つの平面が交わる直線のことを，
　交線と呼びます。

例題　次の２つの平面の交線の方程式を求めよ。

平面 α_1 ： $3x-y+z-5=0$，直線 α_2 ： $2x+y+3z+4=0$

［解答］１）連立方程式を解き，x，y を z の式で表す。

$$\begin{cases}3x-y+z-5=0\\2x+y+3z+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x-y=-z+5 & \cdots①\\2x+y=-3z-4 & \cdots②\end{cases}$$

①＋②より　$5x=-4z+1$　　$\therefore x=-\dfrac{4}{5}z+\dfrac{1}{5}\cdots③$

②より　$-\dfrac{8}{5}z+\dfrac{2}{5}+y=-3z-4$　　$\therefore y=\dfrac{-7}{5}z-\dfrac{22}{5}\cdots④$

２）③と④を z について解く（$z=$ の形に変形する）。

よって，交線の方程式は　$\dfrac{x-1/5}{-4/5}=\dfrac{y+22/5}{-7/5}=z$

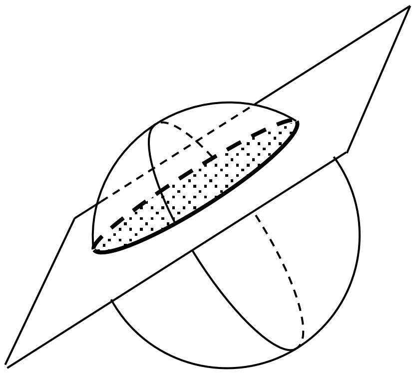
$\boxed{\text{課題}}$　次の２つの平面の交線の方程式を求めよ。

平面 α_1 ： $x+2y-z+1=0$，直線 α_2 ： $2x+y+2z-1=0$

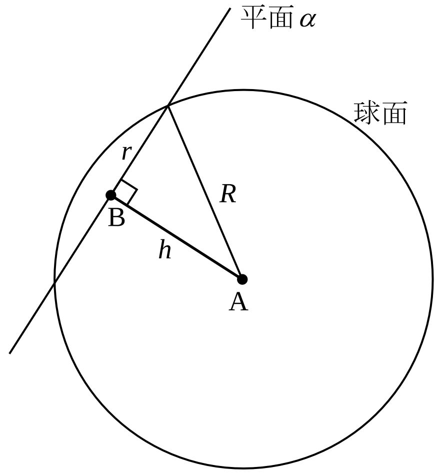
4.4　平面と球面の交円

平面と球面の交円とは？

○球面が平面によって切断されるとき，
　その切り口は円になります。
○球面と平面が交わってできる円を
　交円と呼びます。



例題に入る前に，「断面図」で Hint を書いておきます。



球面の中心　A
球面の半径　R

交円の中心　B
交円の半径　r

h は点 A と平面 α との距離

中心 B の求め方
直線 AB は点 A を通り，平面 α に垂直な直線
点 B は，直線 AB と平面 α の交点

半径 r の求め方
三平方の定理より　$R^2=r^2+h^2$

例題　次の平面と球面が重なってできる交円の中心の座標と半径を求めよ。

平面： $2x+y-2z-1=0$，　球面： $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$

［解答］１）球面の中心の座標 A$(4,\ -2,\ 1)$，　半径 $R=3$

２）点 A と平面の距離　$h=\dfrac{|8-2-2-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{9}}=\dfrac{3}{3}=1$

３）交円の半径　$r^2=R^2-h^2=9-1=8$　　$\therefore r=2\sqrt{2}$

４）直線 AB　$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-2}(=s)$　より　$\begin{cases} x=2s+4 \\ y=s-2 \\ z=-2s+1 \end{cases}$ …①

５）交円の中心　①を平面の方程式に代入すると

$$2(2s+4)+(s-2)-2(-2s+1)-1=0$$
$$4s+8+s-2+4s-2-1=0$$
$$9s+3=0$$
$$\therefore s=-\frac{1}{3}\qquad \mathrm{B}\left(\frac{10}{3},\ -\frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

課題　次の平面と球面が重なってできる交円の中心の座標と半径を求めよ。

平面： $4x-2y-4z+3=0$，　球面： $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$