3.5　例題

まず，２点を通る直線の方程式を求めましょう。

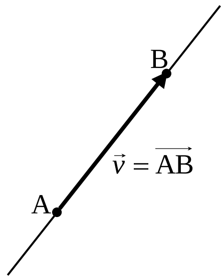
例題　２点 A(1, 1, –4)，B(5, 3, –2) を通る直線の方程式を求めよ。

［解法］方向ベクトル $\vec{v}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を採用する。

［解答］通る点 A(1, 1, –4) で，

方向ベクトル　$\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ の

直線の方程式は　$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{2}$



問 8.14　２点 A(1, 4, –1)，B(4, 3, 3) を通る直線の方程式を求めよ。

ここで幾つかの注意事項を述べます。

【注意１】点 A(1, 1, –4) ではなく点 B(5, 3, –2) を通る点にすることもできます。

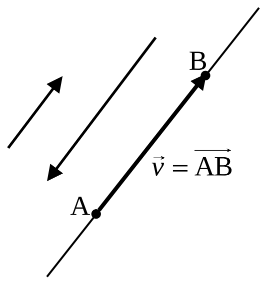
よって　$\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{2}(=s)$　も正解となります。

※上の方程式に，$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ -4)$ を代入しましょう。
全て同じ値（$s=-1$）となることから，点 A もまた，
この直線上にあることが確認できます。

【注意２】方向ベクトルは，直線と平行（伸びている方向）であればよいので
方向ベクトルは一つではありません。

今回の方向ベクトルは　$\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$　でしたが，

他にも　$\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix},\ \cdots$



などを採用することができます。

よって　$\left[\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{2}\ \Rightarrow\right]\dfrac{x-1}{2}=y-1=z+4$　も正解となります。

(※全ての辺に２を掛けた形)

【注意３】通る点を A と B のどちらにするか，方向ベクトルを，逆向きを含め
大きさをどのように設定するかによって，正解が多数存在します。

空間図形_第 05 回

次に，３点を通る平面の方程式を求めましょう。

今回は，先に注意事項を述べます。

【注意１】法線ベクトルにも，方向ベクトルと同じ注意が必要です。

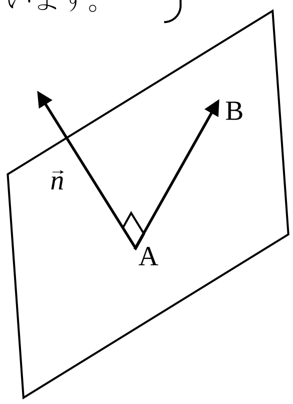
（※使用できる法線ベクトルは多数存在します。このため，いままでの設問が「１つ求めよ。」となっています。）

【注意２】平面の法線ベクトルを $\vec{n}$ とする。

平面の上の任意の２点を A，B とする

このとき，次の関係が成り立つ。

$$\boxed{\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (\Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0)}$$



例題　３点 A$(-4,\ 4,\ 1)$，B$(-3,\ 5,\ -1)$，C$(3,\ 1,\ 4)$ を通る平面の方程式を求めよ。

［解法］通常，平面の法線ベクトルは　$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$　ですが，

今回は，計算の簡便化の為に，$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 1 \end{pmatrix}$　とおくのが Point です。

［解答］平面上の２つのベクトルを求める。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

平面の法線ベクトルを　$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 1 \end{pmatrix}$　とおくと，

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$　より　$n_1 + n_2 - 2 = 0 \cdots$①

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$　より　$7n_1 - 3n_2 + 3 = 0 \cdots$②

①×３＋②より　$10n_1 - 3 = 0 \quad \therefore n_1 = \dfrac{3}{10}$

①より　$\dfrac{3}{10} + n_2 - 2 = 0 \qquad \therefore n_2 = \dfrac{17}{10}$

よって，点 A を通り，法線ベクトル $\vec{n}$ の平面の方程式は

$$\frac{3}{10}(x+4)+\frac{17}{10}(y-4)+(z-1)=0$$

両辺を 10 倍すると

$$3(x+4)+17(y-4)+10(z-1)=0$$
$$3x+12+17y-68+10z-10=0$$
$$\therefore 3x+17y+10z-66=0$$

※解答の中では，法線ベクトルは $\vec{n}=\begin{pmatrix} 3/10 \\ 17/10 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix}$

を使用して，平面の方程式を導きますが，
最終的な解答は，係数は整数(先頭は正値)で表すことが多いので
法線ベクトルは，10 倍された形で表現されます。

問 8.15　３点 A$(-1,\ -2,\ 5)$，B$(3,\ 1,\ -5)$，C$(3,\ -2,\ 1)$ を通る平面の方程式を求めよ。

【注意３】点 B$(-3,\ 5,\ -1)$ を通るとしたらどうなるでしょう。

$$\frac{3}{10}(x+3)+\frac{17}{10}(y-5)+(z+1)=0$$
$$3(x+3)+17(y-5)+10(z+1)=0$$
$$3x+9+17y-85+10z+10=0 \qquad \therefore 3x+17y+10z-66=0$$

当然のことですが，同じ結果になります。
平面の場合，解答の表記は限定的となります。

3.6　外積

外積とは？

外積とは何かを述べる前に，幾つかの準備と
３点(内１点は原点)を通る平面の方程式を求める問題を，
一般的に解きます。

【準備１】次の計算を**行列式**という。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

【準備２】**クラメルの公式**

連立方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ の解は

$$x=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad y=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

【準備３】転置記号を導入します。

○我々は，ベクトルを縦書きで表記します。　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

これを，**縦ベクトル**(又は**列ベクトル**）と呼びます。

○実は，横書きで表記することもできます。

横書きで表記されたベクトルを，

横ベクトル(又は**行ベクトル**)と呼びます。

○縦ベクトルを横ベクトルで表記したいときに，

転置記号[t]をベクトルの左肩に付けて使用します。

［転置記号］　$\vec{a}={}^t\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問題}}$　３点 O(0, 0, 0)，A(a_1, a_2, a_3)，B(b_1, b_2, b_3) を通る平面の方程式を求めよ。

［解答］平面上の２つのベクトルを求める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

平面の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$\vec{n}\perp\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{a}=0$　より　$a_1n_1+a_2n_2+a_3=0$

$\vec{n}\perp\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{b}=0$　より　$b_1n_1+b_2n_2+b_3=0$

よって，連立方程式 $\begin{cases} a_1n_1+a_2n_2=-a_3 \\ b_1n_1+b_2n_2=-b_3 \end{cases}$ の解は

$$n_1=\begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\quad n_2=\begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdots ①$$

このとき，次のことに注意する。

$$\begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix} = -a_3b_2 - (-a_2b_3) = a_2b_3 - b_2a_3 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix} = -a_1b_3 - (-a_3b_1) = a_3b_1 - b_3a_1 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_2 - b_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

つまり，①は，次の様に書き直すことができます。

$$n_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad n_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

よって，原点 O を通り，法線ベクトル $\vec{n}$ の平面の方程式は

$$\frac{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \times (x-0) + \frac{\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \times (y-0) + 1 \times (z-0) = 0$$

従って，最終的な解答の表記は，次の様になります

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} z = 0 \cdots ②$$

あらためて，外積とは，

平面②の法線ベクトルを求める計算式を，

２つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$， $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の**外積**と呼びます。

［外積］ $\vec{a} \times \vec{b} = {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

※覚え方：縦に２つ並べる

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$n_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$n_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

例題　２つのベクトル　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}7\\-3\\3\end{pmatrix}$ の外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

［注意］内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は１つの値になりますが，
外積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトルになります。

［解答］$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}={}^t\left(\begin{vmatrix}1&-3\\-2&3\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}-2&3\\1&7\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}1&7\\1&-3\end{vmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3-6\\-14-3\\-3-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-17\\-10\end{pmatrix}$

問 8.16　２つのベクトル　$\vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を求めよ。

この例題において，何か気付きますか？
この２つのベクトルは,
３点を通る平面の方程式を求める例題中に出てくる
平面内の２つのベクトルですね。
この２つのベクトルの外積計算を行うと
求める平面の法線ベクトルの１つを求めることができます。
(※今回は解答$[3x+17y+10z-66=0]$から得られる法線ベクトルの逆ベクトル)

つまり，外積$\vec{a}\times\vec{b}$は「２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$の両方に垂直なベクトル」です。

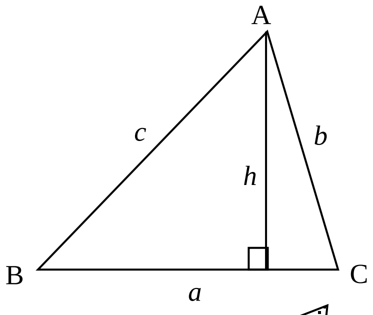
実際，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を計算して,「２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$の直交条件」を確認します。

［直交条件］　$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})=1\times(-3)+1\times(-17)+(-2)\times(-10)$$
$$=-3-17+20=0 \qquad \therefore \overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})=7\times(-3)+(-3)\times(-17)+3\times(-10)$$
$$=-21+51-30=0 \qquad \therefore \overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

＝＝

【研究：２つのベクトルが作る平行四辺形の面積】

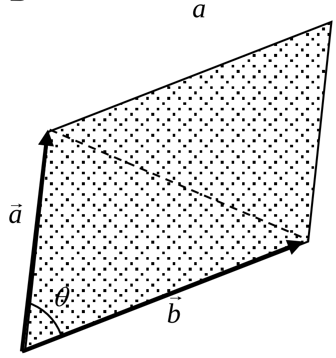


準備１：三角形の面積S

底辺を BC とする△ABC の高さをhとすると

$$\sin B = \frac{h}{c} \quad \text{より} \quad h = c\sin B$$

よって，△ABC の面積は　$S = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}ac\sin B$



準備２：２つのベクトルが作る平行四辺形の面積S

準備１より　$S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

両辺を２乗すると

$$\begin{aligned}
S^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta) \quad [\text{公式：} \sin^2\theta+\cos^2\theta=1] \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \quad [\text{定義：} \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta]
\end{aligned}$$

平面座標の場合：$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

準備２より

$$\begin{aligned}
S^2 &= (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2 \\
&= (a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2) - (a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2) \\
&= a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{S = |a_1b_2 - a_2b_1| \quad \text{（絶対値）}}$$

空間座標の場合：$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

準備２より

$$\begin{aligned}
S^2 &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= \cdots\text{（中略）}\cdots = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2 \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \quad \text{（行列式）}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} = |\vec{a}\times\vec{b}| \quad \text{（大きさ）}}$$

＝＝