§３　応用問題

3.1　空間図形(復習)

空間図形の復習です

○点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り，方向ベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ の直線の方程式

通る点

［直線］ $\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$

方向ベクトル

○点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ の平面の方程式

通る点

［平面］ $n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$

法線ベクトル

［平面］ $n_1x+n_2y+n_3z+d=0$

○点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を中心とし，半径が r の球面の方程式

［球面］標準形：$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=r^2$

中心の座標　　半径の２乗

一般形：$\underline{\underline{x^2+y^2+z^2}}+Ax+By+Cz+D=0$

球面の定型の形

3.2　直線と平面の位置関係

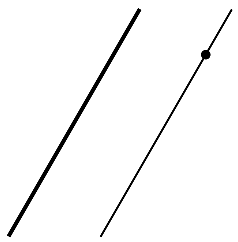
直線と平面の位置関係とは？

○今回は，次の４つの項目について考えましょう。

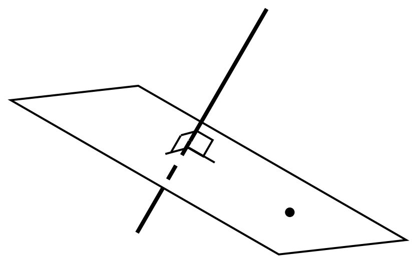
1）与えられた直線に平行な，点 A を通る直線
2）与えられた直線に垂直な，点 A を通る平面
3）与えられた平面に平行な，点 A を通る平面
4）与えられた平面に垂直な，点 A を通る直線

○上の４つの位置関係は分かりますか？[太線が与えられた図形，太点は通る点 A]

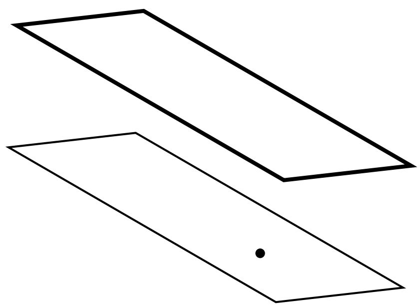
1）



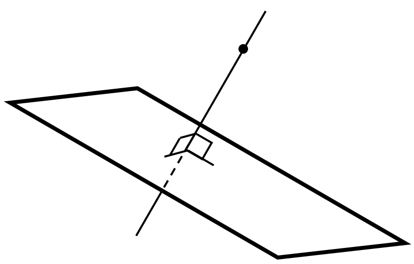
2）



3）



4）



○解法は「直線の方向ベクトル」または「平面の法線ベクトル」の関係です。

1）与えられた「直線の方向ベクトル」が，
　　求める「直線の方向ベクトル」になる。
2）与えられた直線の「方向ベクトル」が
　　求める「平面の法線ベクトル」になる。
3）与えられた「平面の法線ベクトル」が
　　求める「平面の法線ベクトル」になる。
4）与えられた「平面の法線ベクトル」が
　　求める「直線の方向ベクトル」になる。

例題　次の図形の方程式を求めよ。

(1) 直線 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+1}{2}$ に垂直な，点 $(3,\ 4,\ 1)$ を通る平面

(2) 平面 $2x+3y-3z-4=0$ に垂直な，点 $(-2,\ 2,\ 1)$ を通る直線

［Hint］(1) 直線 $\dfrac{x-2}{\boxed{4}}=\dfrac{y+1}{\boxed{-3}}=\dfrac{z+1}{\boxed{2}}$ の方向ベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$

(2) 平面 $\boxed{2}x+\boxed{3}y+(\boxed{-3}z)-4=0$ の法線ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$

［解答］(1) 問題より，求める平面は，点 $(3,\ 4,\ 1)$ を通り

法線ベクトル[=直線の方向ベクトル]が $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$ であるから

$$4(x-3)-3(y-4)+2(z-1)=0$$
$$4x-12-3y+12+2z-2=0$$
$$\therefore\ 4x-3y+2z-2=0$$

(2) 問題より，求める直線は，点 $(-2,\ 2,\ 1)$ を通り

方向ベクトル[=平面の法線ベクトル]が $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$ であるから

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-3}$$

問 8. 11　点 $\mathrm{A}(-1,\ 4,\ 1)$ と直線 l ： $x+4=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-3}{4}$ について，

次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方向ベクトル $\vec{v}$ の 1 つを求めよ。

(2) 点 A を通り，直線 l に平行な直線の方程式を求めよ。

(3) 点 A を通り，直線 l に垂直な平面の方程式を求めよ。

3.3　直線と平面の交点問題

直線と平面の交点問題とは？

問題を解く前に，直線に関する復習を行います。
第 02 回の中で，直線の方程式を求めるときに

［直線］　$\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}(=s)$ ←※今回は，ここが重要！

と書いていたのを，覚えていますか？

$\dfrac{x-a_1}{v_1}=s$　より

$x-a_1=v_1 s$

$\therefore x=v_1 s+a_1$

我々は，この s を**媒介変数**と呼び，
また，次の表記法を媒介変数表示と呼びます。

［直線の媒介変数表示］　$\begin{cases} x=v_1 s+a_1 \\ y=v_2 s+a_2 \\ z=v_3 s+a_3 \end{cases}$

例題　直線 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z+4}{3}$ と平面 $x-4y+z+13=0$ との交点の座標を求めよ。

［解答］ $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z+4}{3}=s$ とおく。

直線の媒介変数表示は $\begin{cases} x=2s-2 \\ y=5s-2 \\ z=3s-4 \end{cases}$ …①

これらを，平面の方程式に代入すると

$(2s-2)-4(5s-2)+(3s-4)+13=0$

$2s-2-20s+8+3s-4+13=0$

$-15s+15=0$　　　　$\therefore s=1$

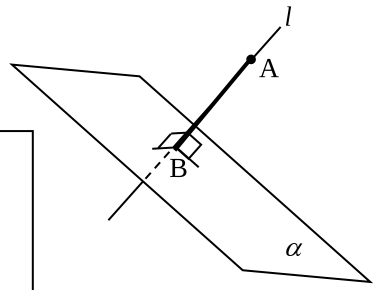
よって，交点の座標は　①より　$(x,\ y,\ z)=(0,\ 3,\ -1)$

問 8.12　直線 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{5}$ と平面 $4x+5y+3z-18=0$ との交点の座標を求めよ。

3.4　点と平面との距離

点と平面との距離とは？

点 A は平面 α 上にないものとする。
点 A を通り，平面 α に垂直な直線 l を考える。
平面 α と直線 l との交点を B とする。
このとき，AB を点 A と平面 α の**距離**と呼ぶ。



点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$　と
平面 α ： $n_1x+n_2y+n_3z+d=0$
の距離を h とする

［点と平面の距離］　$h=\dfrac{|n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+d|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$

証明）平面 α の法線ベクトルは　$\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

直線 l は，点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，

方向ベクトル[＝平面 α の法線ベクトル]が $\vec{v}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ であるから

$$\frac{x-a_1}{n_1}=\frac{y-a_2}{n_2}=\frac{z-a_3}{n_3}(=s)$$

よって，直線 l の媒変数表示は　$\begin{cases} x=n_1s+a_1 \\ y=n_2s+a_2 \\ z=n_3s+a_3 \end{cases}$ …①

①を平面 α に代入すると

$$n_1(n_1s+a_1)+n_2(n_2s+a_2)+n_3(n_3s+a_3)+d=0$$
$$(n_1^2+n_2^2+n_3^2)s+(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+d)=0$$

このとき， $L=n_1^2+n_2^2+n_3^2$， $M=n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+d$ …②

とおくと　$Ls+M=0$　　　$\therefore s=-\dfrac{M}{L}$

故に，点 B の座標は　$\mathrm{B}\left(a_1-\dfrac{n_1M}{L},\ a_2-\dfrac{n_2M}{L},\ a_3-\dfrac{n_3M}{L}\right)$

従って　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\dfrac{-M}{L}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$　より

$$h=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\frac{M^2n_1^2}{L^2}+\frac{M^2n_2^2}{L^2}+\frac{M^2n_3^2}{L^2}}=\sqrt{\frac{M^2(n_1^2+n_2^2+n_3^2)}{L^2}}$$

②より　$L=n_1^2+n_2^2+n_3^2$　であるから

$$h=\sqrt{\frac{M^2\times L}{L^2}}=\sqrt{\frac{M^2}{L}}=\frac{|M|}{\sqrt{L}}=\frac{|n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+d|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\quad [※②より]$$

※注意　$a>0$　のときは　$\sqrt{a^2}=a$　であるが,

一般的には　$\sqrt{a^2}=|a|$　が成り立つ。

例題　点 $(2,\ 3,\ 1)$ と平面 $2x-5y-4z+5=0$　との距離 h を求めよ。

［解法］

分子：平面の方程式　$n_1\underline{x}+n_2\underline{y}+n_3\underline{z}+d=0$　に点 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を代入した形です。

$$h=\frac{|\ n_1\underline{a_1}+n_2\underline{a_2}+n_3\underline{a_3}+d\ |}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$$

分母：平面の法線ベクトルの大きさ $|\vec{n}|$

［解答］　$h=\dfrac{|4-15-4+5\ |}{\sqrt{4+25+16}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{45}}=\dfrac{10}{3\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{15}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

※点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$　と　分子 $M=n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+d$　の関係

点 A が平面 α の上側の場合　$M>0$

点 A が平面 α 上にある場合　$M=0$

点 A が平面 α の下側の場合　$M<0$

距離のときは絶対値 $|M|$ にする必要あり

問 8.13　点 $(-1,\ 3,\ 2)$ と平面 $3x-2y+3z+5=0$　との距離 h を求めよ。

＝＝

【研究：特殊な直線と平面の方程式】

直線の方向ベクトルの成分 v_1，v_2，v_3 に 0 を含む場合は，

実は，１頁に述べた公式は使用できません(分母に 0 がくる)。

例えば，$v_1 = 0$ のとき，直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 0 \times s + a_1 \\ y = n_2 s + a_2 \\ z = n_3 s + a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 \\ y = n_2 s + a_2 \\ z = n_3 s + a_3 \end{cases} \text{より}$$

点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，方向ベクトル$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$の直線の方程式は

［特殊な直線①］　$x = a_1$，$\dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3} (= s)$

また，$v_1 = v_2 = 0$ のとき，直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 0 \times s + a_1 \\ y = 0 \times s + a_2 \\ z = n_3 s + a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \\ z = n_3 s + a_3 \end{cases} \text{より}$$

点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，方向ベクトル$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}$の直線の方程式は

［特殊な直線②］　$x = a_1$，$y = a_2$

平面の法線ベクトルの成分 n_1，n_2，n_3 の中に，0 が含まれていても

特に問題はありませんが，今回は$n_2 = n_3 = 0$の場合を取り上げます。

点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，法線ベクトル$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の平面の方程式は

$$n_1(x - a_1) + 0 \times (y - a_2) + 0 \times (z - a_3) = 0$$

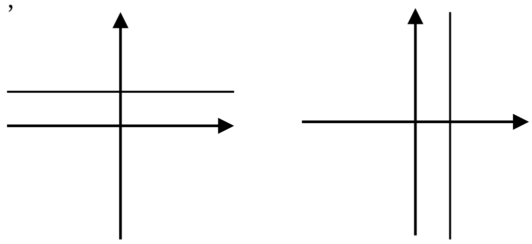
$$\Rightarrow \quad n_1(x - a_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a_1$$

ところで，平面座標では，特殊な直線として，

x 軸に平行な直線　$y = a_2$

y 軸に平行な直線　$x = a_1$

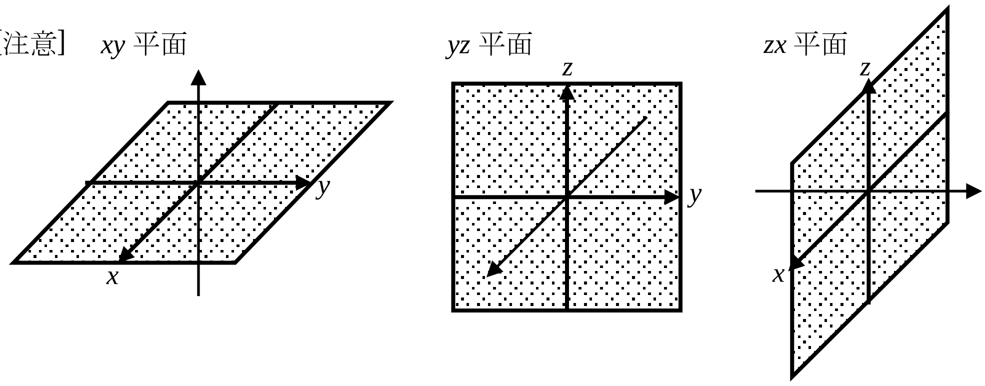
を紹介しました。



しかし，空間座標では，$x = a_1$ は，直線ではなく，

先ほどの結果から yz 平面に平行な平面となります。

[注意]　xy 平面　　yz 平面　　zx 平面



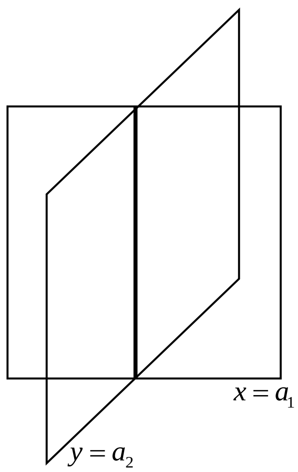
このことを踏まえると，［特殊な直線②］は

yz 平面に平行な平面　$x = a_1$　と

zx 平面に平行な平面　$y = a_2$　の

[z 軸に平行な]公線が

求める直線であることを意味します。



点 A $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ を通り，方向ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \end{pmatrix}$ の平面の方程式は

［特殊な平面③］　$x = a_1$　(※ yz 平面に平行な平面)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝