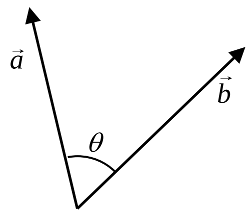
2.4　直交条件

直交条件とは？

２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角が直角のとき，
２つのベクトルは**直交**すると呼ぶ。



［垂直条件］　$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

【参考】内積の定義　$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

１）θが鋭角($0^\circ < \theta < 90^\circ$)のとき　　$\cos\theta > 0$　より　$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
２）θが直角（$\theta = 90^\circ$)のとき　　$\cos\theta = 0$　より　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
３）θが鈍角($90^\circ < \theta < 180^\circ$)のとき　　$\cos\theta < 0$　より　$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

例題　$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ -5 \end{pmatrix}$　が直交するように定数xの値を定めよ。

［解答］　$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

よって　$-3 + 2x - 5x = 0$　より　$-3x = 3$　　$\therefore x = -1$

問 8.8　$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$　が直交するように定数xの値を定めよ。

2.5　平面の方程式

平面の方程式とは？

点Ａを通り，ベクトル$\vec{n}$に垂直な図形の方程式を考える。
このとき，$\vec{n}$を，求めた図形の**法線ベクトル**と呼ぶ。
図形上の任意の点をＰとする。

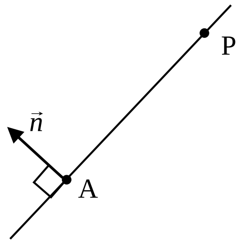
［図形の方程式］　$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$

証明）$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

よって　$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$

何か気付きましたか？
実は，平面座標と空間座標で求める図形が異なります。

平面座標の場合
前頁の説明文を表す図は右の様になります。
つまり，求める図形は「直線」となります。

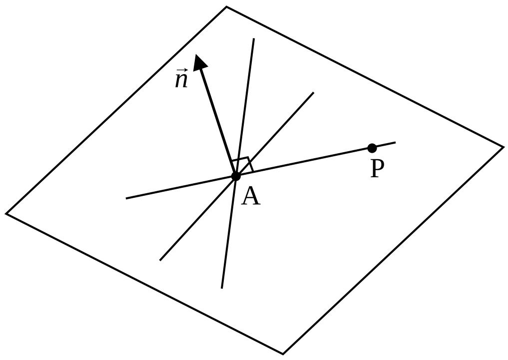


このとき　$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$　とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$

よって　$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$　より　$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$

空間座標の場合
前頁の説明文を表す図はどのようなものでしょうか？
$\vec{n}$ に垂直な点 A を通る直線はたくさんありそうです。
答えは，$\vec{n}$ に垂直な点 A を通る直線の全てを含む「平面」です。



このとき　$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$　とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix}$$

よって　$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$　より　$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$

点Aを通り，法線ベクトル$\vec{n}$に垂直な図形

平面座標：［直線］ $n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$

空間座標：［平面］ $n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$

【注意】平面の方程式は，次の様に変形できる。

$$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a)=0$$

$$n_1x-n_1a_1+n_2y-n_2a_2+n_3z-n_3a_3=0$$

$$\therefore \boxed{n_1x+n_2y+n_3z+d=0}$$ （但し　$d=-n_1a_1-n_2a_2-n_3a_3$）

例題　次の問いに答えよ。

(1) 点A(1, 1, −5)を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$ である平面の方程式を求めよ。

(2) 平面　$2x-3y+z+5=0$　の法線ベクトル$\vec{n}$を一つ求めよ。

［解法］(1)　通る点A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$

$$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$$

法線ベクトル$\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$

(2) $n_1x+n_2y+n_3z+d=0$

［解答］(1) $3(x-1)+5(y-1)-2(z+5)=0$

$$3x-3+5y-5-2z-10=0$$

$$\therefore 3x+5y-2z-18=0$$

(2) $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

問8.9　次の問いに答えよ。

(1) 点A(3, 1, −3)を通り，法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$ である平面の方程式を求めよ。

(2) 平面　$2x-y+4z-3=0$　の法線ベクトル$\vec{n}$を一つ求めよ。

2.6　球面の方程式

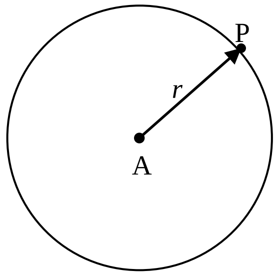
球面の方程式とは？

定点Aからの距離が一定rである図形について考える。
図形上の任意の点をPとする。

［図形の方程式］　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = r$

平面座標場合：$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \end{pmatrix}$$　より



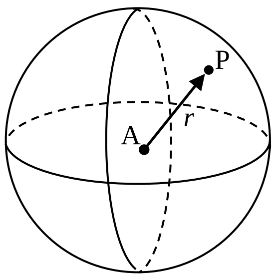
$$r = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}$$

$$\therefore (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2$$

よって，点Aを中心とする半径rの**円**である。

空間座標の場合：$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix}$$　より



$$r = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}$$

$$\therefore (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2$$

よって，点Aを中心とする半径rの**球面**となります。

点Aを中心とし，半径がrの円又は球面の方程式

平面座標：［円］　$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r^2$

空間座標：［球面］$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2$

【注意】球面の方程式は，次の様に変形できる。

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2$$

$$(x^2 - 2a_1x + a_1^2) + (y^2 - 2a_2y + a_2^2) + (z^2 - 2a_3z + a_3^2) = r^2$$

$$\therefore \boxed{x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{但し} & A = -2a_1,\ B = -2a_2,\ C = -2a_3 \\ & D = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - r^2 \end{array} \right)$$

例題　次の問いに答えよ。

(1) 点$(1,\ -3,\ 4)$を中心とする，半径4の球面の方程式の標準形と一般形を求めよ。

(2) 方程式　$x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z+5=0$　が表す球面の中心の座標と半径rを求めよ。

［解説］(1)　標準形：$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=r^2$

中心の座標　　半径の２乗

一般形：$\underline{\underline{x^2+y^2+z^2}}+Ax+By+Cz+D=0$

球面の定型の形

(2)「平方完成」を用いて,「一般形」を「標準形」に直します。

［解答］(1)　$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=16$　；標準形

$$(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)+(z^2-8z+16)=16$$

$\therefore x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+10=0$　；一般形

(2)　$x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z+5=0$

$\left(\underline{\underline{x^2-4x}}+\underline{\underline{y^2-4y}}+\underline{\underline{z^2+2z}}+5=0\right)$　←この式は省略可能[説明用]

$$\underline{\underline{(x-2)^2-4}}+\underline{\underline{(y-2)^2-4}}+\underline{\underline{(z+1)^2-1}}+5=0$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$$

（答）中心の座標$(2,\ 2,\ -1)$，半径$r=2$

問 8.10　次の問いに答えよ。

(1) 点$(2,\ 5,\ -1)$を中心とする，半径3の球面の方程式の標準形と一般形を求めよ。

(2) 方程式　$x^2+y^2+z^2-3x+4y-5z+2=0$　が表す球面の中心の座標と半径rを求めよ。