§２　空間図形

2.1　内分点・外分点

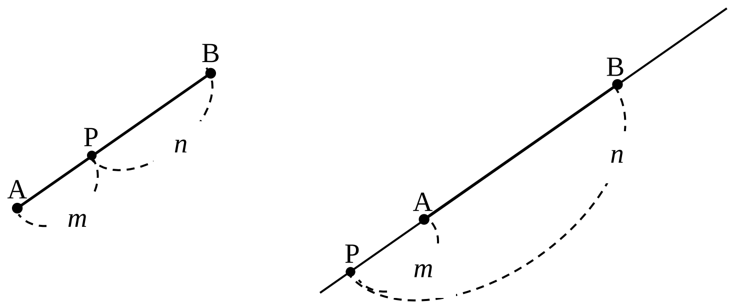
内分点・外分点とは？

○線分 AB 上に点 P を取る。

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ が成り立つとき、点 P を線分 AB を $m:n$ に**内分**する点と呼ぶ。

○直線 AB において，点 P は線分 AB 上でない点とする。

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ が成り立つとき，点 P を線分 AB を $m:n$ に**外分**する点と呼ぶ。



［内分点］　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$　　［外分点］　$\vec{p}=\dfrac{(-n)\vec{a}+m\vec{b}}{m+(-n)}$

※「$m:n$ に外分」は「$m:(-n)$ に内分」と覚える！

証明）内分点：$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　$\vec{p}-\vec{a}=\dfrac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$

$$\therefore\ \vec{p}=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

$$=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

外分点：点 A は線分 PB を $m:(n-m)$ に内分するので

$$\vec{a}=\frac{(n-m)\vec{p}+m\vec{b}}{m+(n-m)}=\frac{-(m-n)\vec{p}+m\vec{b}}{n}$$

よって　$n\vec{a}=-(m-n)\vec{p}+m\vec{b}$　より

$$\vec{p}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\frac{(-n)\vec{a}+m\vec{b}}{m+(-n)}$$

例題　２点 $A(3,\ -2,\ 4)$,$B(-2,\ 1,\ 2)$ において，次の点を求めよ。

(1) 線分 AB を $3:2$ に内分する点 P の座標を求めよ。

(2) 線分 AB を $1:3$ に外分する点 Q の座標を求めよ。

［解答］(1)　$$\vec{p}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}=\frac{1}{5}\left\{2\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix}6\\-4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\-1\\14\end{pmatrix}$$

（答）$P\left(0,\ -\frac{1}{5},\ \frac{14}{5}\right)$

(2)　$$\vec{p}=\frac{(-3)\vec{a}+\vec{b}}{1+(-3)}=\frac{1}{-2}\left\{-3\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}=\frac{-1}{2}\left\{\begin{pmatrix}-9\\6\\-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-11\\7\\-10\end{pmatrix}$$

（答）$Q\left(\frac{11}{2},\ -\frac{7}{2},\ 5\right)$

問 8.5　２点 $A(3,\ -2,\ 4)$,$B(-2,\ 1,\ 2)$ において，次の点を求めよ。

(1) 線分 AB を $1:3$ に内分する点 P の座標を求めよ。

(2) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 Q の座標を求めよ。

2.2　平行条件

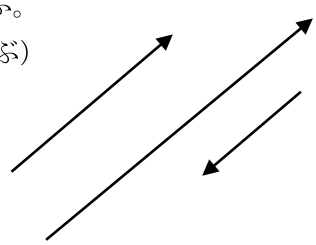
平行条件とは？

２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ において，

「方向」が同じ向きか逆向きのときに，**平行**である呼ぶ。

（※本 TEXT では重なる場合も平行と呼ぶ）

［平行条件］　$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{b}=s\vec{a}$　（s は実数）



例題　$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\x\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\y\\-6\end{pmatrix}$ が平行であるように定数 $x,\ y$ の値を定めよ。

［解答］　$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{b}=s\vec{a}$

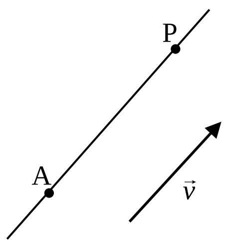
よって　$\begin{pmatrix}3\\y\\-6\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\2\\x\end{pmatrix}$　より　$\begin{cases}3=-s\\y=2s\\-6=sx\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}s=-3\\x=2\\y=-6\end{cases}$

問 8.6 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\8\end{pmatrix}$ が平行であるように定数 $x,\ y$ の値を定めよ。

2.3 直線の方程式

直線の方程式とは？

点 A を通り，ベクトル $\vec{v}$ に平行な直線の方程式を考える。
このとき，$\vec{v}$ を直線の**方向ベクトル**と呼ぶ。
直線上の任意の点を P とする。



［直線の方程式］ $\vec{p}=\vec{a}+s\vec{v}$ （s は実数）

証明） $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,//\,\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{v}$

よって $\vec{p}-\vec{a}=s\vec{v}$ $\quad\therefore\ \vec{p}=\vec{a}+s\vec{v}$

平面座標の場合：$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{v}$ より $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+sv_1\\a_2+sv_2\end{pmatrix}$

よって $\begin{cases}x=a_1+sv_1\\y=a_2+sv_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-a_1=sv_1\\y-a_2=sv_2\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=s$$

空間座標の場合：$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{v}$ より $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+sv_1\\a_2+sv_2\\a_3+sv_3\end{pmatrix}$

よって $\begin{cases}x=a_1+sv_1\\y=a_2+sv_2\\z=a_3+sv_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-a_1=sv_1\\y-a_2=sv_2\\z-a_3=sv_3\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}=s$$

［直線の方程式］点Aを通り，方向ベクトル$\vec{v}$に平行な直線

平面座標：$\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}(=s)$

空間座標：$\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}(=s)$

例題　次の問いに答えよ。

(1) 点A$(1,\ 1,\ -5)$を通り，方向ベクトル$\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$に平行な直線の方程式を求めよ。

(2) 方程式 $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{2}$ が表す図形について述べよ。

［解法］　分子：通る点A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$$

分母：方向ベクトル$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

［解答］(1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+5}{-2}$

(2) $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{2}\left[\Rightarrow\ \dfrac{x-(-3)}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-(-4)}{2}\right]$ より

点$(-3,\ 2,\ -4)$を通り，方向ベクトル$\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$に平行な直線

問 8.7　次の問いに答えよ。

(1) 点A$(4,\ -5,\ 3)$を通り，方向ベクトル$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$に平行な直線の方程式を求めよ。

(2) 方程式 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{4}=z-3$ が表す図形について述べよ。