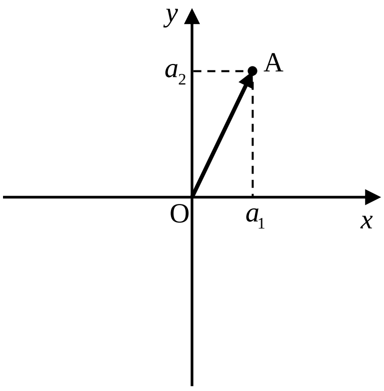
第８章　空間図形

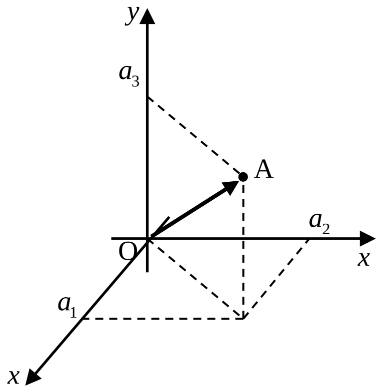
§１　３次ベクトル

1.1　空間座標

空間座標とは？

〇２つの数直線が原点で直交する座標を，**平面座標**と呼ぶ。
また，点 A の座標を $(a_1,\ a_2)$ と表す。
〇３つの数直線が原点でそれぞれ直交する座標を，**空間座標**と呼ぶ。
また，点 A の座標を $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ と表す。
（※座標内の各値を，順に，第１成分，第２成分，第３成分と呼ぶ）





1.2　位置ベクトル

位置ベクトルとは？

〇原点 O を始点とし，点 A を終点とするベクトルを，
点 A の**位置ベクトル**と呼ぶ（記号：通常，小文字を用いて表す）。
〇点 A の座標を，位置ベクトル $\vec{a}$ の**成分表示**とする。

［位置ベクトル］　平面座標 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ のとき　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

空間座標 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

（※座標は”横書き”，ベクトルは”縦書き”により本 TEXT では区別する）

1.3　ベクトルの大きさ

ベクトルの大きさとは？

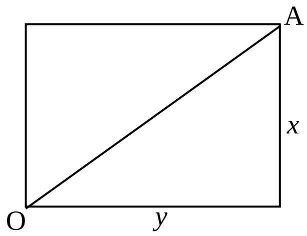
〇ベクトルとは，２つの概念「方向」と「大きさ」をもつものである。
〇通常，ベクトルは，「矢印」で表現される。
　「方向」は，「矢印が指し示す向き」で，
　「大きさ」は，「矢印の長さ」で表します。
〇位置ベクトル$\vec{a}$　の「大きさ」は，記号$|\vec{a}|$で表す。

［大きさ］　$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

説明）横の長さがx，縦の長さがyの
長方形の対角線の長さは
三平方の定理より

$\mathrm{OA}^2=x^2+y^2$　　$\therefore \mathrm{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$



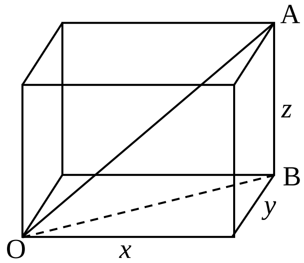
横の長さがx，縦の長さがy，高さがzの
直方体の対角線の長さを考える。
三平方の定理より

$\mathrm{OB}^2=x^2+y^2 \cdots ①$

$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2+z^2 \cdots ②$

よって，①と②より

$\mathrm{OA}^2=x^2+y^2+z^2$　　$\therefore \mathrm{OA}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$



【注意】原点Oの位置ベクトルは，**零ベクトル**といい
（オーの小文字を用いて）記号$\vec{o}$　で表します。
また，零ベクトルの大きさは　$|\vec{o}|=0$　です。

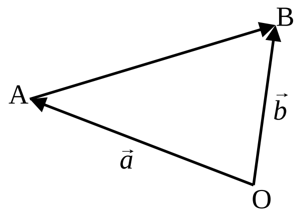
今回は，空間座標をメインテーマとして取り扱いますが，
出来るだけ，復習と比較のために，平面座標の内容も紹介していきます。

1.4　距離の公式

距離の公式とは？

まずは，一般的な内容から

［重要公式］　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$



証明）$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$

※「成分表示」を用いると具体的にはなりますが，
「矢印」を用いると，次元を超えて，一般的なことを
取り扱うことができます。
※観測前後での変化量のことを「変位」と呼びます。
通常，観測前の状況を基準とし，観測後がどのように変化したかを
調査します。数学的には，観測後の値から観測前の値の差をとる
行為となります。よって，後から前を引く作業はとても重要です。

それでは，２点 A，B 間の距離に関する公式を紹介します。

［距離の公式］

$\mathrm{A}(a_1,\ a_2),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ のとき　$\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

$\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

証明）空間座標(３次元の場合)のとき

２点 A，B 間の距離 AB は，大きさ$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$に等しい。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$　より

$$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

例題　２点 A(1, –4, 2), B(–2, 1, 3) 間の距離を求めよ。

［解答］　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1+4)^2+(3-2)^2}=\sqrt{9+25+1}=\sqrt{35}$

問 8.1　２点 A(2, –3, 4), B(5, 1, –2) 間の距離を求めよ。

1.5　ベクトルの相等

ベクトルの相等とは？

２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ において

ベクトルの「方向」と「大きさ」が同じとき，

２つのベクトルは**等しい**[記号：$\vec{a}=\vec{b}$]という。

空間座標(３次元)の場合について，具体的に表記する。

［相等］　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ のとき

$$\vec{a}=\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$$（※各成分が同じ値になる）

説明）ベクトル(矢印)は平行移動可能である。

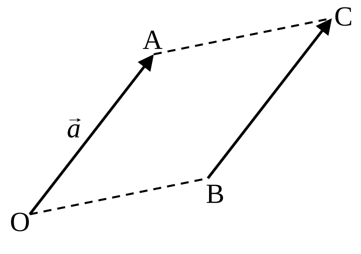
このとき，「方向」と「大きさ」が同じであれば

２つのベクトルは，重なることになる。

よって，同じ成分表示で表される。

例題　３点 A(1, –3, 2), B(–2, 1, 3), C(x, y, z) において，

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるような点 C の座標を求めよ。



［解答］$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}=\begin{pmatrix}x+2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}$

よって，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より

$$\begin{cases}x+2=1\\y-1=-3\\z-3=2\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}x=-1\\y=-2\\z=5\end{cases}$$

（答） C(–1, –2, 5)

問 8.2　３点 A(2, –3, 4), B(5, 1, –2), C(x, y, z) において，

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるような点 C の座標を求めよ。

1.6　いろいろなベクトル

いろいろなベクトルとは？

○平面座標におけるベクトルを,

２次ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と呼び,

空間座標におけるベクトルを,

３次ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と呼びます。

○「大きさ」が同じで,「方向」が逆向きのベクトルを,

逆ベクトルといい，記号：$-\vec{a}$ で表します。

［逆ベクトル］　３次ベクトルの場合

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad -\vec{a}=\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

○特別な名称のベクトルを紹介します。

「大きさ」が 0 のベクトルを，**零ベクトル**といい,

「大きさ」が 1 のベクトルを，**単位ベクトル**と言います。

［特別名称］　(1) $\vec{o}$ ：零ベクトル　$\Leftrightarrow$　$|\vec{o}|=0$

(2) $\vec{a}$ ：単位ベクトル　$\Leftrightarrow$　$|\vec{a}|=1$

1.7　ベクトルの線形性

ベクトルの線形性とは？

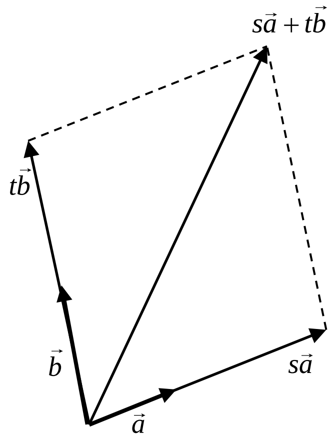
○次の性質をベクトルの**線形性**と呼びます。

［線形性］　３次ベクトルの場合

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sa_1+tb_1 \\ sa_2+tb_2 \\ sa_3+tb_3 \end{pmatrix}$$

但し，s，t は実数とする。



例題　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$　のとき，$3\vec{a}+2\vec{b}$ の成分表示を求めよ。

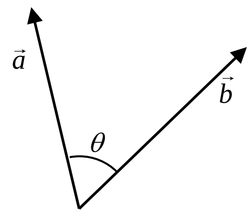
［解答］　$3\vec{a}+2\vec{b}=3\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\12\end{pmatrix}$

問 8.3　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$　のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の成分表示を求めよ。

1.8　内積

内積とは？

２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の始点を重ねる。
このときにできる狭い方の角 $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$を，
２つのベクトルが**なす角**と呼ぶ。



２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ となす角 θ を用いた
次の計算を**内積**と呼ぶ。

［内積］　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

内積は，次の様にも計算することができる。

［内積］　$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$　のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$　のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

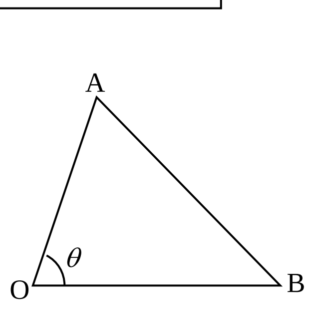
証明）余弦定理より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2$$

よって，３次ベクトルの場合は



$$
\begin{aligned}
2\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \\
&\quad -\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2\} \\
&= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \\
&\quad -\{(b_1^2-2a_1b_1+a_1^2)+(b_2^2-2a_2b_2+a_2^2)+(b_3^2-2a_3b_3+a_3^2)\} \\
&= 2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3
\end{aligned}
$$

従って，結論が得られる。つまり　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

例題　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 大きさ$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ。

(2) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角をθを求めよ。

［解答］(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$,　$|\vec{b}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2+3+6=7$

(3) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \theta=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

問 8.4　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 大きさ$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ。

(2) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角θを求めよ。

＝＝

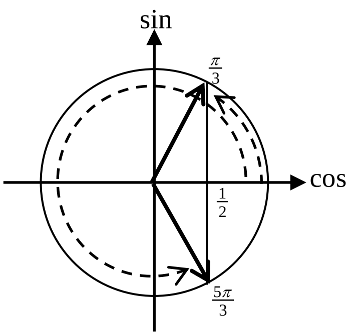
【復習：三角方程式】

$0\leqq x<2\pi$ で，方程式$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$を解け。

［解法］単位円を用いる。

［解答］右図より

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5}{3}\pi$



（※内積のなす角θの範囲は$0\leqq x\leqq\pi$であることに注意！）

＝＝