

2.6 例題

例題 関数 $y = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$ の増減・極値を調べてグラフを描け。

- [解法] 1) 微分し, 因数分解する (必要な点を pick up)。
 2) 増減表を作成する (ジグザクも作成)。
 3) グラフを描く (滑らかな曲線で!).

[解答] 1) 微分し, 因数分解する

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 \\ &= 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= 12(x-1)(x^2 - x - 2) \\ &= 12(x-1)(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

組立除法

$$\begin{array}{r|rrrr} x=1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Pick up

$$x = -1, 1, 2$$

2) 増減表を作成する

x	...	-1	...	1	...	2	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	-19 極小	↗	13 極大	↘	8 極小	↗

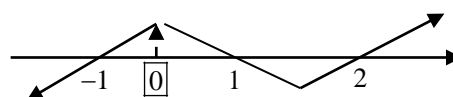
$$x = -1 \text{ のとき } y = 3 + 8 - 6 - 24 = -19$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = 3 - 8 - 6 + 24 = 13$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = 48 - 64 - 24 + 48 = 8$$

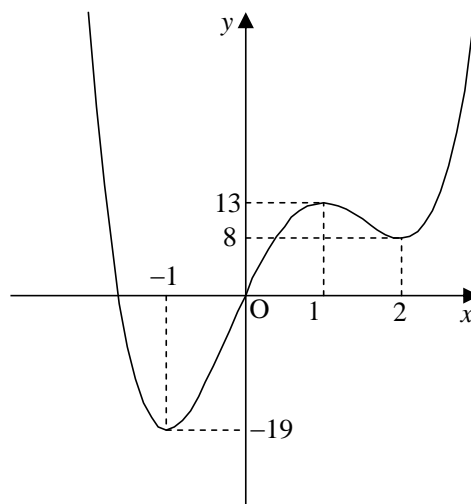
ジグザク

$$x = 0 \text{ のとき } y' = 24 \text{ (上側)}$$



3) グラフを描く

※ y 切片を求めておくこと!
 $x = 0 \text{ のとき } y = 0$



問 5.3 関数 $y = x^4 - 2x^2$ の増減・極値を調べてグラフを描け。

【参考】組立除法

問題 $x^3 - 2x^2 - x + 2$ を因数分解せよ。

- 1) まず係数を書き出す。
 - 2) $x = \square$ の候補を決める
 - ・候補は、定数項の±(約数)
 - [今回は ±1, ±2]
 - ・係数をすべて足して 0 になる時は $x=1$ が成立
 - 3) 先頭の係数を 3 行目に下ろす
 - 4) 3 行目の数と $x=1$ を掛けて、2 行目にずらして上げる
 - 5) 足して下ろす
 - 6) $x=1$ と掛けて、右斜めに上げて足して、下ろす作業を繰り返す
 - 7) 最後の数字と前の部分を “|” で仕切る
 - ・最後の数字 = 余り [今回は 0]
 - ・前半部分 = 商の係数 [今回は $x^2 - x - 2$]
 - 8) 余りが 0 の場合は因数分解成功(Bingo!)
 - [今回は $(x-1)(x^2 - x - 2)$]
- 余りが 0 でないときは、 $x = \square$ の候補を入替えて、やり直します。

$$x = \square \left) \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & & & \end{array}$$

$$x = 1 \left) \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & & & \end{array}$$

$$x = 1 \left) \begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -1 & 2 \\ \downarrow & & & \\ \boxed{1} & & & \end{array}$$

$$x = \boxed{1} \left) \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ \downarrow & & & \\ \boxed{1} & & & \end{array}$$

$$x = 1 \left) \begin{array}{cccc} 1 & \boxed{-2} & -1 & 2 \\ \downarrow & & & \\ \boxed{1} & & & \\ \hline 1 & \boxed{-1} & & \end{array}$$

$$x = 1 \left) \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ \downarrow & & & \\ \boxed{1} & & & \\ \hline 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\boxed{x-1} = 0$

例題[応用：重解を含む場合]

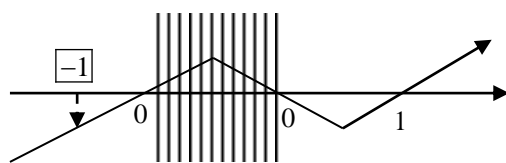
関数 $y = 3x^4 - 4x^3$ の増減・極値を調べてグラフを描け。

[解答] 1) 微分 $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

Pick up $x=1, 0$ (重解)

※重解の場合は、 $x=0, 0, 1$ (注意：0を2つ書く!) として
ジグザグを作る

$x=-1$ のとき $y' = 12 \times 1 \times (-2) = -24 < 0$ (下側)



(削除)

※ $x=0$ (重解)の間は存在しないので、削除します。

2) 増減表

x	...	0	...	1	...
y'	-	0	-	0	+
y	↘	0	↘	-1 極小	↗

※ $x=0$ (重解)の左右で、
 y' (2行目)の符号が変化していない
ことに注意しましょう。
つまり、 $x=0$ では $y'=0$ となるが
極値ではありません。(第08回参照)

$x=0$ のとき $y=0$

$x=1$ のとき $y=3-4=-1$

3) グラフ

