# §２　増減表

## 2.1　単調増加・単調減少

単調増加・単調減少とは？

関数 $y = f(x)$ が表すグラフにおいて，

　グラフが右上がりに増加している場合を，**単調増加**といい

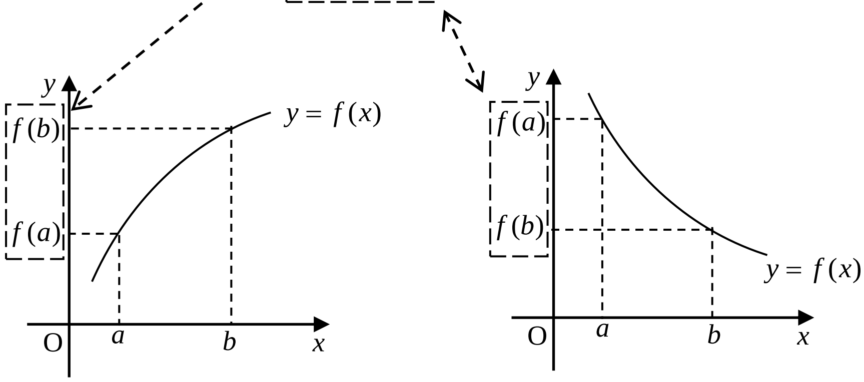
　グラフが右下がりに減少している場合を，**単調減少**という。

数学的には，次のように表現します。

ある区間 $I$ に属するすべての２点 $a$，$b$ に対して

［単調増加］　$a < b \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(a) < f(b)}$

［単調減少］　$a < b \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(a) > f(b)}$



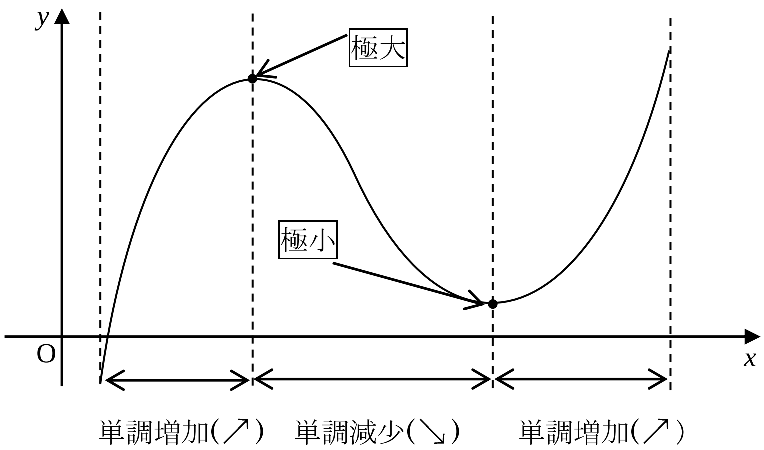

数学の記号として，次のような矢印を用います。

| |
|---|
| ［記号］　単調増加（↗）　　　単調減少（↘） |

## 2.2　極値

極値とは？

○「単調増加（↗）」から「単調減少（↘）」に変わる点を**極大**といい，
　その点における関数の値を**極大値**という。
○「単調減少（↘）」から「単調増加（↗）」に変わる点を**極小**といい，
　その点における関数の値を**極小値**という。
○極大値と極小値をあわせたものを，単に**極値**という。




※「極大」は，図形的には「山の頂上」になる所です。
　「極小」は，図形的には「谷の奥底」になる所です。

## 2.3　微分係数との関係

どんな関係がありますか？

「微分係数」は，図形的には「接線の傾き」でしたね。[第 07 回を参照]
○　「単調増加」している点での「接線の傾き」は正だから
　　つまり，「微分係数」が正となります。
○「単調減少」している点での「接線の傾き」は負だから
　　つまり，「微分係数」が負になります

［微分係数との関係］
(1) 区間 $I$ で単調増加　$\Leftrightarrow$　$f'(a) > 0$　（$a \in I$）
(2) 区間 $I$ で単調減少　$\Leftrightarrow$　$f'(a) < 0$　（$a \in I$）

単調増加のとき

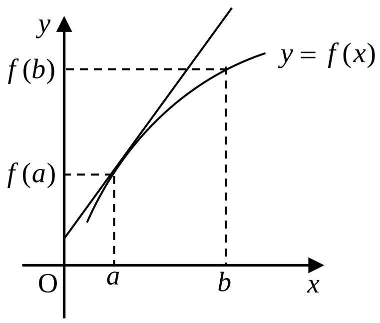
$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)$

よって，平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

従って，微分係数(＝接線の傾き)は

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$




単調減少のとき

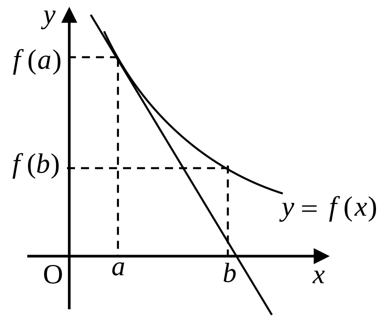
$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b)$

よって，平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$$

従って，微分係数(＝接線の傾き)は

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$$



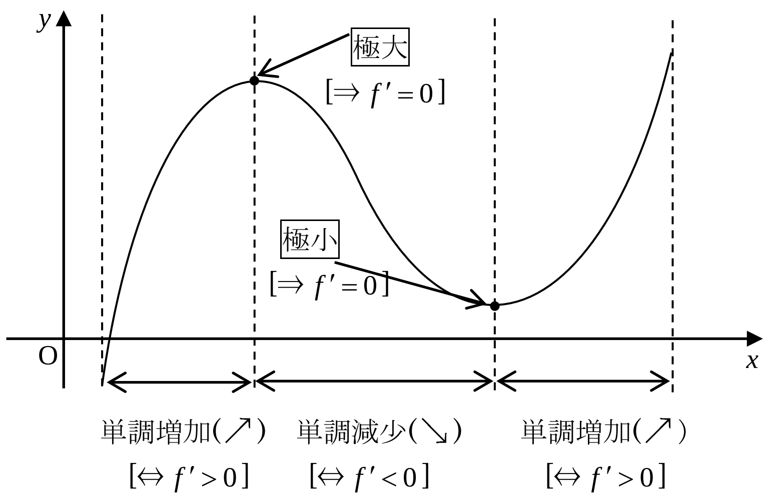

〇極大は単調増加（ $f' > 0$ ）から単調減少（ $f' < 0$ ）に変わるところ。

　つまり，極大となるところでは　 $f' = 0$ 　が成立する

〇極小は単調減少（ $f' < 0$ ）から単調増加（ $f' > 0$ ）に変わるところ。

　つまり，極小となるところでは　 $f' = 0$ 　が成立する

［極値判定］　 $x = a$ で極値をとる　⇒　 $f'(a) = 0$



## 2.4　注意事項

注意事項？

単調増加・単調減少と微分(係数)の関係は，必要十分条件です。

［微分係数との関係］
(1) 区間 $I$ で単調増加　$\Leftrightarrow$　$f'(a) > 0$　（$a \in I$）
(2) 区間 $I$ で単調減少　$\Leftrightarrow$　$f'(a) < 0$　（$a \in I$）

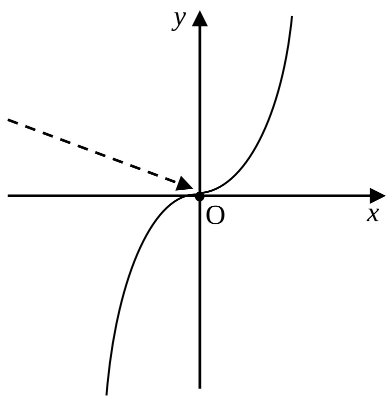
しかし，極値と微分(係数)の関係は，必要十分ではありません。

［極値判定］　$x = a$ で極値をとる　$\Rightarrow$　$f'(a) = 0$

この逆は，不成立です。つまり

$f'(a) = 0$　$\Rightarrow$　$x = a$ で極値をとる　（偽）

反例：$f(x) = x^3$　における　$x = 0$　が状況
実際，$f(x) = x^3$　より　$f'(x) = 3x^2$
よって，$x = 0$ における微分係数は　$f'(0) = 0$（←条件は満たす）
ところが，右図より，
$x = 0$ は極大（山の頂上）でも
極小（谷の奥底）でもない。




※単調増加から単調減少でなく
単調増加から単調増加となるので
極値ではない。

## 2.5　増減表

増減表とは？

「単調増加（↗）」と「単調減少（↘）」，
「極大」と「極小」を一つの表にまとめたものを**増減表**と言います。
この増減表を作成することにより，関数のグラフが描けます。

例題　関数 $y=x^3-3x$ の増減・極値を調べてグラフを描け。

［解法と解答］

１）微分する。更に，因数分解をする。

$y=x^3-3x\cdots$①　より　$\underbrace{y'=3x^2-3}_{(微分)}=\underbrace{3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)}_{(因数分解)}\cdots$②

２）$y'=0$ となる点の $x$ 座標を pick up（拾い上げる）する。

②より　$x=-1,\ 1$（←極値となるところの候補）

３）増減表を作成する。

３－１）増減表は，３行からなります。

１行目は $x$，２行目は $y'$，３行目は $y$ に関する情報です。

このとき，pick up した点の情報を記載していきます。

Pick up した以外の $x$ の値は「…」で表します(１行目)。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $0$ | | $0$ | |
| $y$ | | | | | |

$x=-1,\ 1$（１行目）は、$y'=0$（２行目）を満たす

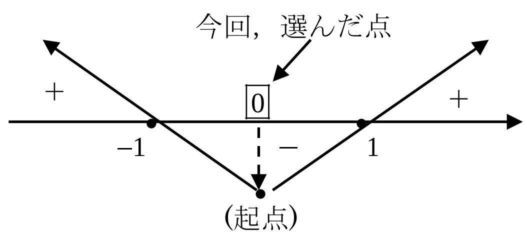
３－２）２行目を作成します。

Pick up した点以外を用います。今回は $x=0$ を用います。

２行目なので，$y'$(②を使用)より

$y'=3\times(-1)\times1=-3\ \underline{\underline{<0}}$（←値ではなく，正 or 負が必要！）

次のような，“ジグザグ”の図を作成します。



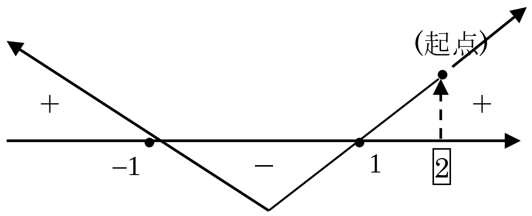

※選んだ点の $y'$ の値が正のときは上側に，

負のときは下側に，「起点」を置きます

※起点から，pick up した点を通るようにジグザグに線を交差させる。

※上側は「＋」，下側は「－」を意味します。

$x=2$ を採用すると，②より　$y'=3\times1\times3=9>0$




(※pick up した点と交わるようにジグザグに線を交差させる)

これらの情報(＋or－)を，増減表の２行目に記入します。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | | | | | |

[確認事項]
(1) $y'>0$ のときは
単調増加(↗)
(2) $y'>0$ のときは
単調減少(↘)

３－３） ３行目を完成させます。

「＋」の下には「↗」(単調増加) を

「－」の下には「↘」(単調減少) を記入する。

Pick up したところは，３行目なので，$y$ (①を使用)より

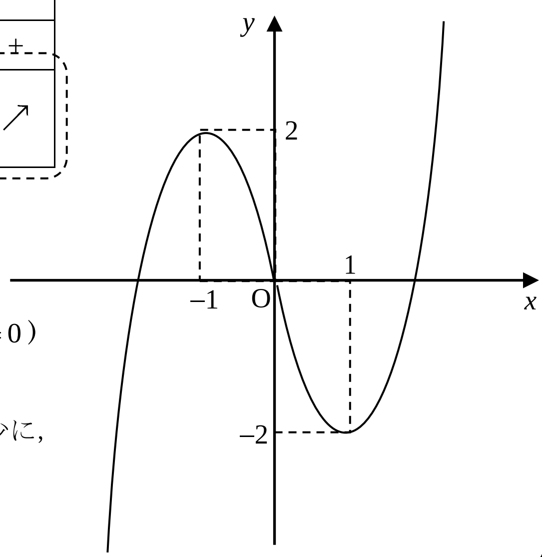
$x=-1$ を①に代入して　$y=-1+3=2$ を

$x=1$ を①に代入して　$y=1-3=-2$ を記入する

更に、「＋」から「－」に変化するところには「極大」を

「－」から「＋」に変化するところには「極小」を記入する。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $2$<br>極大 | ↘ | $-2$<br>極小 | ↗ |




４）この表に基づき，グラフを描きます。

点 $(-1,\ 2)$ と点 $(1,\ -2)$ をとる。

$y$ 切片を調べる(①に $x=0$ を代入。$y=0$)

左側から点 $(-1,\ 2)$ までは単調増加に，

点 $(-1,\ 2)$ から点 $(1,\ -2)$ までは単調減少に，

点 $(1,\ -2)$ から右側では単調増加になる

ように **滑らかな曲線** で描く。

**問 5.2**　関数 $y=x^3+3x^2+1$ の増減・極値を調べてグラフを描け。